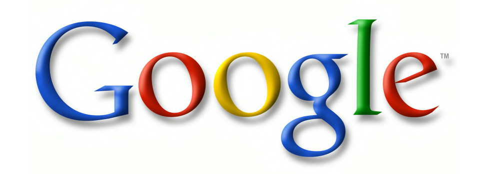



Google



Math
8508
75.3

ELEMENTE

DES

GRAPHISCHEN CALCULS.

ELEMENTE

DES

GRAPHISCHEN CALCULS.

VON

DR. LUIGI CREMONA,

PROFESSOR, DIRECTOR DER KÖNIGL. SCUOLA D'APPLICAZIONE PER GL'INGEGNERI IN ROM.

AUTORISIERTE DEUTSCHE AUSGABE.

UNTER MITWIRKUNG DES VERFASSERS ÜBERTRAGEN

VON

MAXIMILIAN CURTZE.



MIT 131 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG

VERLAG VON QUANDT & HÄNDEL.

1875.

VORWORT DES ÜBERSETZERS.

Nachdem die Herren Verleger dieser Uebersetzung den Unterzeichneten aufgefordert hatten, eine solche auszuarbeiten, setzte sich derselbe mit dem Herrn Verfasser des Originals in Verbindung, um von diesem und dem italiänischen Verleger die Erlaubniss zu dieser Arbeit zu erlangen. Beide Herren haben mit freundlichster Bereitwilligkeit die Erlaubniss ertheilt, Herr Prof. CREMONA ausserdem durch theilweise Zusätze zum Original, sowie durch das Lesen einer Correctur um die Richtigkeit der Uebersetzung sich grosse Verdienste erworben. Ich ermangele nicht, denselben meinen verbindlichsten Dank öffentlich auszudrücken.

Statt die Figuren auf besonderen Blättern nebenher zu geben, haben die Herren Verleger es vorgezogen, dieselben in den Text des Buches selbst eindrucken zu lassen. Die leichte Benutzbarkeit des Werkes dürfte dadurch nicht unbeträchtlich gewonnen haben, das überhaupt, wie kaum ein anderes, geeignet ist, in die in neuerer Zeit so bedeutend in den Vordergrund getretene graphische Behandlung der Rechnungs- und der statischen Probleme einzuführen.

Das italiänische Original ist für die Istituti Tecnici des italiänischen Reiches bestimmt, die sich am ehesten mit unseren Realschulen, vielleicht noch mehr mit den Gewerbeschulen vergleichen lassen. Dort und in den Vorklassen der Polytechnischen Schulen dürfte die Benutzung auch wohl bei uns angebracht sein.

Thorn, December 1874.

M. Curtze.

AN DEN LESER.

Dieses Werkchen ist nur zu einem Schulzwecke geschrieben worden, und zwar um zum Studium der jugendlichen Zöglinge der *Scuole d'Applicazione* zu dienen, die sich auf die graphische Statik vorbereiten wollen, sowie für die Schüler der *Istituti Tecnici*, denen die Programme vom Jahre 1871 das Studium einiger Theile des graphischen Rechnens zur Pflicht machen.

Obgleich es mir geglückt sein dürfte, einige Resultate zu vereinfachen oder zu verallgemeinern, so strebe ich doch nicht nach dem Ruhme eines Erfinders, ein Ruhm, der andererseits bei einem so elementaren Gegenstande, als der vorliegende ist, sehr zur unrechten Zeit verlangt würde.

Die Werke, aus denen ich alles das geschöpft habe, was auf den nachfolgenden Seiten Gutes sein mag, sind speciell die von Möbius, von unserem Chelini, von Grassmann, von Culmann und von andern Schriftstellern, die ich niemals zu citieren unterlassen habe, so oft mir dieses möglich war.

Die Figuren sind von Herrn Ingenieur Carlo Saviotti gezeichnet worden, dem ich hierfür meinen besten Dank ausspreche.

Rom (S. Pietro in Vincoli), December 1873.

Der Verfasser.

INHALTS-VERZEICHNISS.

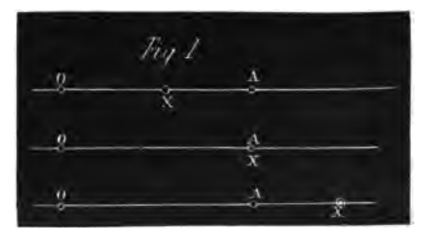
ELEMENTE

DES

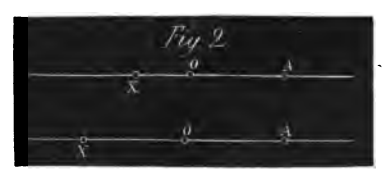
GRAPHISCHEN CALCULS.

I. PRINCIP DER ZEICHEN IN DER GEOMETRIE.

1. Es seien O, A, X drei Punkte einer gegebenen Geraden (Fig. 1), von denen wir die beiden ersten als fest annehmen; der dritte dagegen bewege sich von O ausgehend in der Richtung OA. Es sei ferner bezüglich a, x die Zahl der Lineareinheiten, welche in den Segmenten (d. h. den begrenzten Theilen der Geraden) OA, OX enthalten ist. So lange X zwischen O und A bleibt, hat man $x < a$; fällt X genau auf A, so ist $x = a$; und sobald X weiter fortgeschritten ist, haben wir $x > a$.



Wenn der Punkt X, statt sich von O nach A hinzubewegen, rückwärts in entgegegengesetzter Richtung fortginge (Fig. 2), so wäre die Zahl x der Lineareinheiten, die in der Strecke OX enthalten sind, als negativ zu betrachten, sobald man a als eine positive Zahl festhält. Hätten z. B. X und A gleichen Abstand von O, so hätte man $x = -a$.



Eine Gerade werden wir immer als von einem sich bewegendem Punkte beschrieben ansehen. Von den beiden Richtungen, in denen die Bewegung des erzeugenden Punktes geschehen kann, heisst die eine positiv, die andere negativ. Statt positive

oder negative Richtung sagt man auch positiver oder negativer Sinn.

Sobald ein Segment einer Geraden durch die Zahl x der in ihm enthaltenen Lineareinheiten bezeichnet wird, so wird der Sinn des Segmentes durch das algebraische Zeichen (+ oder —) der Zahl x angezeigt.

Ein Segment lässt sich aber auch mittelst der beiden Buchstaben, die an den Endpunkten stehen, bezeichnen; z. B. AB (Fig. 3).



In diesem Falle setzen wir fest, dass wir AB oder BA schreiben, je nachdem die Bewegung des erzeugenden Punktes als in der Richtung von A nach B oder in der entgegengesetzten vor sich gehend aufgefasst wird. Dieser Bestimmung gemäss bezeichnen die Symbole AB, BA zwei gleiche, aber entgegengesetzte*) Grössen, und es folgt also die Identität

$$AB + BA = 0,$$

oder auch

$$AB = - BA, \quad BA = - AB.$$

Von den beiden Punkten A, B, den Grenzpunkten des Segmentes AB, heisst der eine A der Anfangspunkt, der andere B der Endpunkt des Segmentes. Dagegen ist B für das Segment BA der Anfangspunkt und [illegible] der Endpunkt. A

2. Es seien A, B, C drei Punkte in gerader Linie. Liegt C zwischen A und B (Fig. 3), so hat man

$$AB = AC + CB,$$

hieraus

$$- CB - AB + AB = 0,$$

oder auch, da (Nr. 1)

$$- CB = BC, \quad - AC = CA$$

ist,

$$BC + CA + AB = 0.$$

Liegt C auf der Verlängerung von AB, so hat man

$$AB + BC = AC,$$

daraus

$$BC - AC + AB = 0,$$

also auch

$$BC + CA + AB = 0.$$

Liegt endlich C auf der Verlängerung von BA, so erhält man

$$CA + AB = CB,$$

*) Das heisst zwei Grössen von gleichem arithmetischem Werthe, aber mit entgegengesetzten algebraischem Zeichen wie + a und — a.

also

$$-CB + CA + AB = 0,$$

und folglich

$$BC + CA + AB = 0.$$

Wir können also schliessen*):

Wenn A, B, C drei Punkte in gerader Linie sind, so besteht für jede beliebige gegenseitige Lage stets die Identität

$$BC + CA + AB = 0.$$

3. Daraus erhält man den Ausdruck des Abstandes zweier Punkte A, B durch die Abstände, welche dieselben Punkte von einem mit ihnen in einer Geraden befindlichen Punkte haben, den man als *Anfangspunkt* der Segmente fixiert hat. Sind nämlich O, A, B drei Punkte auf einer Geraden, so hat man

$$OA + AB + BO = 0,$$

also

$$AB = OB - OA$$

oder auch

$$AB = AO + OB.$$

4. Sind A, B, C, ..., M, N n Punkte in gerader Linie und besteht für sie das durch die Gleichung

$$AB + BC + \ldots. + MN + NA = 0$$

ausgesprochene Theorem, so behaupte ich, dass dasselbe Theorem auch für $n + 1$ Punkte richtig ist. Denn ist O ein anderer Punkt derselben Geraden, so besteht zwischen den drei Punkten N, A, O die Relation

$$NA = NO + OA,$$

die angenommene Gleichung geht also über in

$$AB + BC + \ldots + MN + NO + OA = 0,$$

q. e. d. Nun ist schon bewiesen (Nr. 2), dass der Satz für $n = 3$ richtig ist, also gilt derselbe auch für $n = 4$, u. s. w.

5. Das Zeichen eines Segmentes AB ist unbestimmt, solange nicht ein Segment derselben Geraden schon als positiv gegeben ist; die Richtung desselben heisst die **positive Richtung der Geraden.**

Für zwei verschiedene Gerade ist die positive Richtung der einen von der positiven Richtung der andern im Allgemeinen unabhängig. Wenn aber die beiden Geraden parallel sind, so wollen wir voraussetzen, dass ihre positiven Richtungen zusammenfallen, d. h., dass, wenn die positive Richtung der ersten Geraden bestimmt ist, und diese Gerade parallel zu sich selbst verschoben wird, bis sie mit der andern Geraden zusammenfällt, die positiven Richtungen beider so aufeinandergelegter Geraden dieselben sind.

---

*) MÖBIUS, *Barycentrischer Calcul* (Leipzig, 1827), § 1.

Daraus folgt, dass zwei parallele Segmente AB, CD gleiche oder verschiedene Zeichen haben, jenachdem die Richtung von A nach B mit der Richtung von C nach D zusammenfällt oder nicht. Ist z. B. ABCD ein Parallelogramm, so hat man

$$AB + CD = 0, \; BC + DA = 0.$$

Zieht man durch n gegebene Punkte einer Ebene $A_1, A_2, \ldots, A_n$ die Segmente $A_1A_1', A_2A_2', \ldots, A_nA_n'$ parallel zu einer in derselben Ebene gegebenen Richtung bis zum Durchschnitt mit einer festen Geraden $A_1'A_2' \ldots A_n'$, so bestimmt der Sinn eines Segmentes den Sinn jedes andern. Zwei Segmente A_rA_r', A_sA_s' haben denselben oder entgegengesetzten Sinn, jenachdem die Punkte A_r, A_s auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten der gegebenen Geraden $A_1'A_2' \ldots A_n'$ liegen.

Zwei einander gleiche, parallele Segmente mit demselben Zeichen heissen äquipollent*).

6. Sind A, B, C, D vier Punkte in gerader Linie, so ist identisch

$$AD \,.\, BC + BD \,.\, DA + CD \,.\, AB = 0.$$

Die Segmente BC, CA, AB kann man nämlich, wie folgt, ausdrücken

$$BC = BD - CD, \quad CA = CD - AD, \quad AB = AD - BD;$$

multipliciert man nun diese drei Gleichungen der Reihe nach mit AD, BD, CD und addiert die Resultate, so erhält man genau die Identität, die man beweisen wollte.

7. Es seien p, q, r drei Gerade, die in dem Punkte O zusammenlaufen (Fig. 4). Durch einen beliebigen Punkt M der Ebene ziehe man eine Transversale, welche p, q, r bezüglich in A, B, C schneidet; nach dem vorhergehenden Satze erhält man dann

$$MA \,.\, BC + MB \,.\, CA + MC \,.\, AB = 0.$$

Ziehen wir nun parallel zu der Transversale ABC eine Gerade, welche p, q, r in den Punkten P, Q, R schneidet, so sind die Seg-

*) Bellavitis, *Sposizione del metodo delle equipollenze* (Modena, 1854), no. 3. Ich bin nicht in der Lage auch das erste Memoire des Verfassers über diesen Gegenstand (1835) citieren zu können.

mente BC, CA, AB den Segmenten QR, RP, PQ proportional, und die eben erhaltene Gleichung lässt sich also schreiben

$$MA \,.\, QR + MB \,.\, RP + MC \,.\, PQ = 0.$$

Wenn man durch einen andern beliebigen Punkt M′ eine neue Transversale in der fixierten Richtung PQR zieht, welche p, q, r in A′, B′, C′ schneidet, so hat man ebenfalls

$$M'A' \,.\, QR + M'B' \,.\, RP + M'C' \,.\, PQ = 0.$$

Das heisst:

Zieht man durch einen beliebigen Punkt M in gegebener Richtung eine Transversale, welche drei gegebene in einen Punkt zusammenlaufende Gerade in A, B, C schneidet, so sind die Segmente MA, MB, MC durch die Relation

$$a \,.\, MA + b \,.\, MB + c \,.\, MC = 0$$

verbunden, wo a, b, c Constanten sind.

Von dem Punkte M fälle man auf die drei Geraden p, q, r die Perpendikel MD, ME, MF; ebenso von einem beliebig fixierten Punkte S der Geraden PQR auf dieselben gegebenen Geraden die Lothe SU, SV, SW. Aus den ähnlichen Dreiecken MAD, SPU erhält man dann

$$MA : MD = SP : SU,$$

oder

$$MA = \frac{SP}{SU} \cdot MD,$$

und dem analog

$$MB = \frac{SQ}{SV} \cdot ME,$$

$$MC = \frac{SR}{SW} \cdot MF.$$

Die Gleichung

$$MA \,.\, QR + MB \,.\, RP + MC \,.\, PQ = 0,$$

lässt sich daher auch schreiben

$$MD \cdot \frac{QR \,.\, SP}{SU} + ME \cdot \frac{RP \,.\, SQ}{SV} + MP \cdot \frac{PQ \,.\, SR}{SW} = 0,$$

das heisst:

Wenn man von einem beliebigen Punkte M auf drei sich in einem Punkte schneidende Gerade die Lothe MD, ME, MF fällt, so besteht die Relation

$$\alpha \,.\, MD + \beta \,.\, ME + \gamma \,.\, MF = 0,$$

wo α, β, γ constante Grössen sind.

Die Linien MD, ME, MF könnten, statt auf den gegebenen Geraden senkrecht zu sein, auch auf denselben in beliebig bestimmter Richtung schief stehen; man würde auch dann noch eine Relation von derselben Form erhalten, nur würden die Werthe der α, β, γ sich verändern, der Beweis bliebe aber genau derselbe.

Der Beweis setzt nicht nothwendigerweise voraus, dass der Durchschnittspunkt der Geraden p, q, r in endlicher Entfernung liegt; folglich ist der Satz auch richtig, wenn die drei gegebenen Geraden unter sich parallel sind.

8. In einer gegebenen Ebene lasse man eine Kreisbewegung vor sich gehen (Fig. 5), das heisst, ein Punkt möge sich auf der Peripherie eines Kreises bewegen, oder eine Gerade um einen ihrer Punkte, als fest betrachtet, rotieren. Für einen Beobachter, welcher sich oberhalb der Ebene befindet, wird die Bewegung entweder in dem Sinne vor sich gehen, in welchem sich die Zeiger einer Uhr bewegen, oder in entgegengesetztem Sinne. Der erste dieser beiden Sinne heisse der **positive Sinn der Ebene**; der andere ihr **negativer Sinn**. Einen Bogen der Peripherie betrachtet man als positiv oder negativ, jenachdem die erwähnte Bewegung im positiven oder negativen Sinne der Ebene geschieht (vergl. Nr. 4).



In der Ebene seien die positiven Richtungen a, b zweier Geraden bestimmt (Fig. 6). Wenn unter dieser Voraussetzung die erste Gerade um γ Grade rotieren muss (nämlich um einen ihrer als fest angenommenen Punkte z. B. um den Punkt a b, und im positiven oder negativen Sinne der Ebene dem Zeichen von γ gemäss), damit ihre positive Richtung mit der positiven Richtung der andern zusammenfällt, so sagt man, der durch das Symbol ab bezeichnete Winkel hat γ Grad. Aus dieser Definition folgt, dass man statt γ auch $\gamma \pm 360^0, \gamma \pm 2.360^0, \ldots$ setzen kann. Wenn b um γ' Grade rotieren muss, damit sie mit a zusammenfällt, so wird der Winkel ba analog gleich γ' sein oder $= \gamma' + 360^0, \ldots$ Wenn die positive Richtung a zuerst um γ Grade und dann um γ' Grade rotierte, so würde sie endlich wieder mit sich selbst zusammenfallen, genau als wenn sie sich um 0^0, 360^0, $2.360^0, \ldots$ gedreht hätte; folglich ist



$$ab + ba = 0^0, \text{ oder } = 360^0, \ldots.$$

Es ist in der That evident, dass, wenn γ und γ' beide positiv sind, $\gamma + \gamma' = 360^0$; wenn beide negativ, $\gamma + \gamma' = -360^0$; wenn sie endlich entgegengesetztes Zeichen haben, $\gamma + \gamma' = 0$ ist.

Wir werden schreiben

$$ab + ba = 0,$$

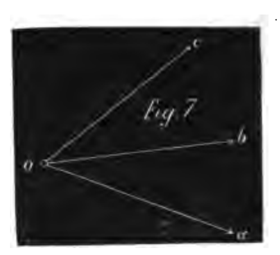
indem wir dabei daran denken, dass wir der Null, wie jedem be-

liebigen Winkel, eine willkürliche ganze Zahl von Kreisperipherien (vom Radius 1) hinzufügen oder wegnehmen können.

Aus den festgesetzten Definitionen folgt also, dass ab und ba zwei gleiche und entgegengesetzte Winkel sind, also

$$ab = -ba, \; ba = -ab.$$

9. In der Ebene seien die Richtungen einer Geraden a, b, c gegeben, die man als durch den nämlichen Punkt O gezogen und nur nach einer Seite desselben verlängert ansehen kann, da der Winkel zweier Geraden von ihrer absoluten Lage unabhängig ist. Wenn man, indem man sich um O im positiven Sinne der Ebene dreht, die drei Geraden in der Reihenfolge acb (Fig. 7) trifft, so hat man identisch



$$ca = cb + ba,$$

oder auch

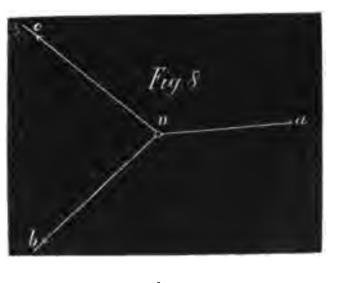
$$-cb + ca - ba = 0.$$

Es ist aber

$$-cb = bc, \; -ba = ab,$$

also

$$bc + ca + ab = 0.$$



Ist die Ordnung der Aufeinanderfolge abc (Fig. 8), so ist

$$bc + ca = ba,$$

hieraus

$$bc + ca - ba = 0,$$

also

$$bc + ca + ab = 0.$$

Folglich hat man den Satz:

Sind a, b, c drei Gerade in derselben Ebene, so besteht für jede beliebige gegenseitige Lage stets die Identität

$$bc + ca + ab = 0.$$

10. Hieraus erhält man analog dem, was für Segmente (Nr. 3) gezeigt wurde, den Ausdruck des Winkels zweier Geraden a, b durch die Winkel, welche dieselben mit einer dritten Geraden o bilden, die beliebig in der Ebene gegeben ist, bestimmt. In der That, sind o, a, b Richtungen in ein und derselben Ebene, so hat man

$$oa + ab + bo = 0,$$

folglich

$$ab = ob - oa,$$

oder auch

$$ab = ao + ob.$$

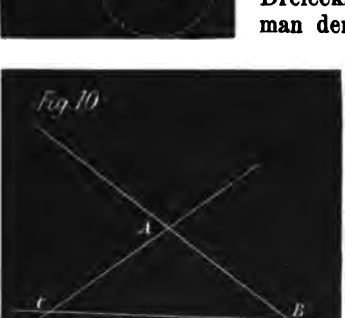
11. Bezeichnet man einen Winkel mit drei Buchstaben, den Symbolen von Punkten, z. B. BAC (Fig. 9), so setzt man voraus,



dass die positiven Richtungen der Schenkel von A nach B und von A nach C gehen; so dass BAC der Winkel der Geraden AB, AC ist (derselbe ist in der Figur spitz), während CAB der (in der Figur durch eine punktierte Linie bezeichnete) Winkel der Geraden AC, AB ist, und folglich hat man:

$$BAC + CAB = 0.$$

12. Drei Punkte A, B, C, die nicht in gerader Linie liegen, sind die Scheitel eines Dreiecks (Fig. 10). Man denke sich, dass man den Umfang desselben stetig, d. h. ohne Sprünge und ohne mehrfach ein und denselben Punkt zu passieren, durchläuft: dann ist jeder Scheitel der Endpunkt einer Seite und der Anfangspunkt der folgenden Seite. Das kann in zwei Weisen geschehen, nämlich in zwei entgegengesetzten Richtungen; im Sinne ABC oder im Sinne ACB. Der Sinn BCA oder CAB ist von ABC nicht verschieden, und ebenso unterscheidet sich weder CBA noch BAC von ACB. In Fig. 10 ist ABC der positive Sinn der Ebene, und ACB ist der negative Sinn derselben. Die innern Winkel des Dreiecks sind BAC, CBA, ACB.



Die Fläche des Dreiecks bleibt zur Rechten oder zur Linken, jenachdem man den Umfang im positiven oder negativen Sinne durchläuft; daher betrachtet man die Flächen ABC, ACB als gleich und entgegengesetzt: die erste als positiv, die zweite als negativ. Die Fläche ABC (oder ACB) kann man als durch einen Radiusvector von variabler Länge beschrieben denken, dessen einer Endpunkt in A festgehalten wird, während der andere Endpunkt das Segment BC (oder CB) durchläuft. Diese Rotation geschieht nun im positiven (negativen) Sinne der Ebene; deshalb betrachtet man auch die Fläche als positiv (negativ) *).

Die nothwendige und hinreichende Bedingung, damit drei Punkte A, B, C in einer Geraden liegen, ist die, dass die Fläche ABC gleich Null ist.

13. Lehrsatz. — Ist O ein beliebiger Punkt der Ebene des Dreiecks ABC (Fig. 11), so hat man stets die Identität

$$OBC + OCA + OAB = ABC. **)$$

*) Möbius, *a. a. O.*, § 17. **) Möbius, *a. a. O.*, § 18.

Beweis. — Liegt O im Innern des Dreiecks ABC, so ist dieses unmittelbar die Summe der Dreiecke OBC, OCA, OAB.

Liegt O innerhalb des Winkels BAC, aber auf der andern Seite von BC, so hat man

$$OCA + OAB - OCB = ABC;$$

es ist aber

$$OCB = - OBC,$$

also

$$OBC + OCA + OAB = ABC.$$



Liegt endlich O in dem Scheitelwinkel von BAC, so hat man

$$OBC - OAC - OBA = ABC,$$

oder auch

$$OBC + OCA + OAB = ABC,$$

w. z. b. w.

In Folge der am Ende von Nr. 12 gemachten Bemerkung erhält man, wenn A, B, C drei Punkte in gerader Linie sind,

$$OBC + OCA + OAB = 0,$$

wo auch der Punkt O liegen mag.

14. Aus diesem Lehrsatz folgt, dass die Fläche des Dreiecks ABC als durch Bewegung eines Strahles von variabler Länge (Radiusvector) erzeugt angesehen werden kann, dessen einer Endpunkt in O (dem Pol) fixiert ist, während der andere Endpunkt den Umfang von ABC in dem gegebenen Sinne durchläuft.

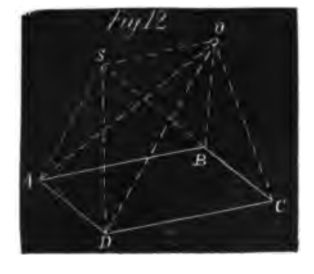
Diese Bemerkung und der obige Satz bleiben unverändert bestehen, selbst wenn BC nicht mehr ein Segment einer Geraden, sondern ein Bogen einer Curve wäre*).

15. Ist O ein beliebiger Punkt in der Ebene des Parallelogramms ABCD (Fig. 12), so hat man

$$OAB + OCD = \tfrac{1}{2}ABCD.$$

Denn, bezeichnen wir durch S den Punkt, in welchem BC durch die Gerade getroffen wird, welche durch O parallel zu AB gezogen ist, so hat man (Nr. 13)

$$SAB + SBC + SCA = ABC.$$



Es ist aber

$$SBC = 0 \quad , SCA = SCD,$$
$$SAB = OAB \, , SCD = OCD,$$

folglich u. s. w. Da $\tfrac{1}{2}ABCD = DAB$ ist, so lässt sich die obige Gleichung auch schreiben

$$ODC = OAB - DAB.$$

---

*) Und folglich auch, wenn BC, CA, AB drei Bogen, die sich nicht schneiden, wären (vgl. Nr. 19).

16. Es seien (Fig. 13) p, q, r drei Gerade, die ein Dreieck ABC bilden; O und M zwei Punkte der Ebene, von denen der erste als fest oder gegeben, der andere als variabel betrachtet werde. Aus den Punkten O und M ziehe man nach der Geraden p zwei Parallele OU, MD in beliebig gewählter Richtung, und dem analog nach q die Parallelen OV, ME, und nach r die Parallelen OW, MF ebenfalls in beliebig gewählter Richtung.



Die Flächen der Dreiecke OBC, MBC sind den Abständen proportional, welche die Scheitel O, M von der gemeinsamen Basis BC haben, und folglich auch den Segmenten OU, MD; also ist

$$OBC : MBC = OU : MD,$$

oder auch

$$MCB = \frac{OBC}{OU} \cdot MD,$$

und dem analog

$$MCA = \frac{OCA}{OV} \cdot ME,$$

$$MAB = \frac{OAB}{OW} \cdot MF.$$

Aber es ist (Nr. 13)

$$MBC + MCA + MAB = ABC,$$

also

$$\frac{OBC}{OU} \cdot MD + \frac{OCA}{OV} \cdot ME + \frac{OAB}{OW} \cdot MF = ABC.$$

Lassen wir den Punkt M in der Ebene variieren, indem wir die Richtungen OU, OV, OW festhalten, so ändern sich in der obigen Gleichung nur die Längen MD, ME, MF; wir erhalten also das Theorem:

Wenn man von einem Punkte M in der Ebene eines gegebenen Dreiecks nach den Seiten desselben die Geraden MD, ME, MF in gegebenen Richtungen zieht, so sind diese Geraden durch die Relation verbunden

$$(+) \ldots \alpha . MD + \beta . ME + \gamma . MF = \delta,$$

wo die Grössen α, β, γ, δ Constante bedeuten.

Der Satz ist noch richtig, wenn zwei der drei gegebenen Geraden p, q, r unter sich parallel sind. Es seien z. B. q, r parallel, und man ziehe eine Gerade s, die weder zu q, r, noch zu p parallel ist. Legen wir dann durch einen beliebigen Punkt M in beliebig angenommenen Richtungen die Geraden MD, ME, MF, MG nach den Geraden p, q, r, s, so sind, da p, q, r ein Dreieck bilden, nach dem

eben bewiesenen Satze die MD, ME, MG durch eine Relation von der Form (+) verbunden, die wir so schreiben können

$$\alpha . \mathrm{MD} + \beta . \mathrm{ME} + \mathrm{MG} = \delta;$$

da dem entsprechend die p, r, s ebenfalls ein Dreieck bilden, so erhalten wir zwischen MD, MF, MG eine Relation derselben Form

$$\alpha' . \mathrm{MD} + \gamma . \mathrm{MF} + \mathrm{MG} = \delta'.$$

Subtrahieren wir diese Gleichung von der vorhergehenden, so kommt

$$(\alpha - \alpha') . \mathrm{MD} + \beta . \mathrm{ME} - \gamma . \mathrm{MF} = \delta - \delta',$$

d. h. MD, ME, MF sind ebenfalls durch eine Relation von der Form (+) verbunden, w. z. b. w.

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung des Satzes in Nr. 7 in Bezug auf drei Gerade p, q, r, die in einem Punkt in endlicher oder unendlicher Entfernung zusammenlaufen. In diesem speciellen Falle ist die Constante δ gleich Null.

17. Wir wollen die Linie, welche ein Punkt beschreibt, der sich in einer Ebene aus einer Lage (der Anfangslage) bis zu einer andern (der Endlage) ohne Sprünge, d. h. ohne jemals die Ebene zu verlassen, bewegt, einen Linienzug nennen. Der Linienzug ist geschlossen, wenn die Endlage mit der Anfangslage zusammenfällt; er ist offen im entgegengesetzten Falle. Wenn der Linienzug sich selbst schneidet, so heissen die Durchschnittspunkte Knotenpunkte, und der Linienzug heisst verschlungen.

Wird der Linienzug aus geradlinigen Segmenten gebildet, so heisst derselbe Polygonallinie oder einfach Polygon.

Ein beliebiger Linienzug kann, ebenso wie der Umfang eines Dreiecks (Nr. 12), in zwei entgegengesetzten Richtungen durchlaufen werden. Wir wollen denjenigen Sinn positiv nennen, der mit dem positiven Sinn der Ebene zusammenfällt. Damit der Sinn eines Linienzuges gegeben sei, ist es hinreichend, wenn man die Ordnung in der Aufeinanderfolge zweier Punkte desselben kennt, wenn der Linienzug offen ist, und von drei, wenn er geschlossen ist.

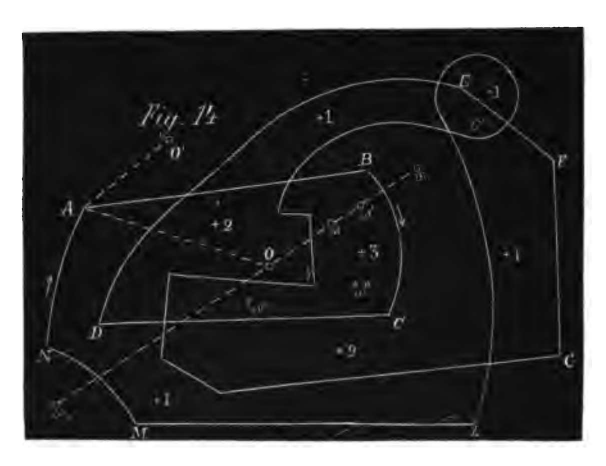
18. Ein geschlossener Linienzug ohne Knotenpunkte umschliesst einen innern, endlichen Theil der Ebene, und trennt diesen von dem übrigen Theile, dem äussern und unendlichen. Das Mass der innern Region ist das, was man Flächeninhalt des Linienzuges nennt, und als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem er sich rechts oder links von einer Person befindet, welche auf der Ebene stehend den Linienzug im gegebenen Sinne desselben durchläuft; das will sagen, der Flächeninhalt ist positiv oder negativ, jenachdem der Linienzug im positiven oder negativen Sinne der Ebene durchlaufen ist (Nr. 12).

19. Lehrsatz. — Wenn ABCD .... MNA (Fig. 14) ein beliebiger geschlossener Linienzug ist, und O

ein Punkt in seiner Ebene, so ist die Summe aller Dreiecke (oder Sectoren)

$$\Sigma = OAB + OBC + OCD + \ldots + OMN + ONA$$

für jede beliebige Lage des Punktes O eine constante Grösse.*)



Beweis. — Es sei O′ ein anderer Punkt der Ebene; dann ist nach dem Satz in Nr. 13

$$O'AB = OAB + OBO' + OO'A,$$
$$O'BC = OBC + OCO' + OO'B,$$
$$O'CD = OCD + ODO' + OO'C,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$O'MN = OMN + ONO' + OO'M,$$
$$O'NA = ONA + OAO' + OO'N.$$

Addieren wir, so kommt

$$O'AB + O'BC + O'CD + \ldots + O'MN + O'NA$$
$$= OAB + OBC + OCD + \ldots + OMN + ONA = \Sigma,$$

da die andern Glieder sich aufheben, weil sie zu zwei und zwei gleich und entgegengesetzt sind, wie OO′A und OAO′, OOB′ und OBO′ u. s. w.

Die Grösse Σ kann man als durch Bewegung eines Strahles (Radiusvectors) von variabler Länge OX erzeugt ansehen, dessen einer Endpunkt im festen Pole O sich befindet, während der andere Endpunkt den gegebenen Linienzug in dem gegebenen Sinne durchläuft.

20. Es sei ω ein Element der Ebene, d. h. ein nach allen Richtungen sehr kleiner (unendlich kleiner) Theil; man denke

---

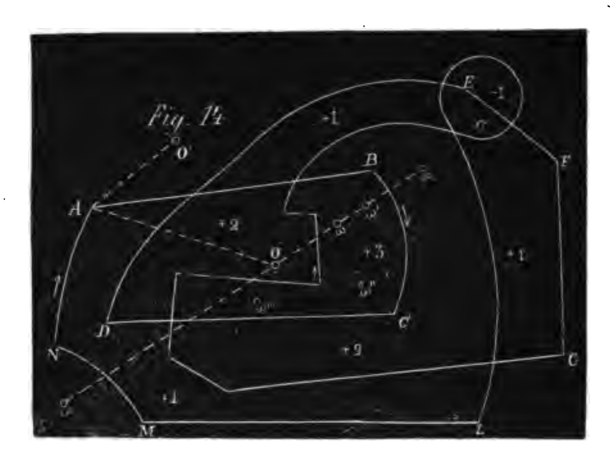
*) Möbius, *Barycentrischer Calcul,* § 165; *Statik* (Leipzig, 1837), § 45.

sich diejenigen zwei Lagen des Radiusvector (die einen unendlich kleinen Winkel einschliessen), welche das Element ω zwischen sich fassen. Von diesen beiden Lagen nennen wir die Lage $O\omega$ die erste, die nämlich, die zuerst von dem beweglichen Radius OX eingenommen wird, wenn der Punkt X den Linienzug im gegebenen Sinne durchläuft. Es sei X ein Punkt des Linienzuges, der auf der Verlängerung von $O\omega$ (jenseits von ω in Bezug auf O) liegt, und X' der dem Punkte X nächste Punkt, in welchem der Linienzug von dem zweiten der oben bestimmten Radienvectoren getroffen wird, so dass der den Linienzug beschreibende Punkt zuerst die Lage X und unmittelbar nachher die Lage X' einnimmt. Wir wollen dann sagen, dass der Durchschnitt X des Linienzuges mit der Verlängerung des Radiusvectors $O\omega$ positiv oder negativ ist, jenachdem die Fläche des Elementarsectors OXX', in welchem ω enthalten ist, positiv oder negativ ist (Nr. 18). Unter den Durchschnitten des Linienzuges mit der Verlängerung von $O\omega$ seien m positive und n negative, das soll heissen, unter den Elementarsectoren, aus denen sich die Summe Σ zusammensetzt, und von denen das Element ω einen Theil bildet, seien m positiv und n negativ. Es wird also dann ω in die Summe Σ mit dem Coefficienten m—n eintreten.

Ich behaupte nun, dass der Coefficient m—n des Elementes ω für jede beliebige Lage des Poles O constant ist. Wenn nämlich ein Punkt X den ganzen Linienzug in dem gegebenen Sinne durchläuft, so wird der Radius ωX (der um den Mittelpunkt des Elementes ω beweglich ist) eine gewisse Rotation $\gamma + h \,.\, 360^0$ im positiven Sinne, und eine gewisse andere Rotation $-\gamma' - k \,.\, 360^0$ im negativen Sinne ausführen. Dabei ist $\gamma = \gamma'$, da die Endlage des Radius ωX mit der Anfangslage zusammenfallen muss. Daraus folgt, dass die Gesammtrotation von ωX gleich $(h-k) \,.\, 360^0$ sein wird, d. h. eine ganze Zahl h—k (die positiv oder negativ sein kann) von Umläufen. Für jeden dieser Umläufe giebt es eine (und nur eine) Lage des Radius ωX, deren Verlängerung über ω hinaus durch O geht; d. h. die Anzahl von Malen, welche der Radiusvector OX durch ω geht, ist gleich der Zahl der Umläufe h—k, welche der Linienzug um ω macht. Die Zahl aber, wievielmal OX durch ω geht, ist gleich dem Coefficienten m—n des Elementes ω in Bezug auf den Pol O; folglich ist $m-n = h-k$, d. h. der Coefficient m—n ist von der Wahl des Poles O unabhängig.

21. Ein gegebener geschlossener und verschlungener Linienzug (Fig. 14) theilt die Ebene in eine bestimmte Anzahl von endlichen Räumen S_1, S_2, ... die aneinander anstossen. Jeder von ihnen wird von einem nicht verschlungenen Linienzug begrenzt, in der Art, dass die ganze Ebene aus diesen Räumen und der noch übrigen (äussern) unendlichen Region besteht, welche letztere wir mit S_0 bezeichnen wollen.

Es seien ω, ω' zwei Elemente der Ebene, die sich durch eine Gerade so verbinden lassen, dass diese den Linienzug nicht schneidet, und man wähle den Pol O auf einer der Verlängerungen der



Geraden $\ldots \omega\omega' \ldots$ Offenbar kann dann der Radius OX nicht ω durchlaufen, ohne gleichzeitig ω' in demselben Sinne zu durchlaufen; ω und ω' werden also in Σ mit demselben Coefficienten eintreten. Den nämlichen Coefficienten haben auch die Elemente $\omega'', \omega''', \ldots$, sobald der Linienzug nicht zwischen ω' und ω'', zwischen ω'' und $\omega''', \ldots$ durchgeht. Da wir auf diese Weise nach und nach sämmtliche Elemente ein und desselben Raumes S zusammenfassen können, so werden sämmtliche Elemente von S in Σ mit einem gemeinsamen Coefficienten c eintreten. Das heisst, S ist in Σ mit dem Coefficienten c enthalten. Sind also $c_1, c_2, \ldots$ die analogen Coefficienten der Räume $S_1, S_2, \ldots$, so erhalten wir

$$\Sigma = c_1 S_1 + c_2 S_2 + \ldots,$$

wenn wir dies so verstehen, dass $S_1, S_2, \ldots$ gleichzeitig auch die Flächeninhalte der durch diese Symbole dargestellten Räume ausdrücken.

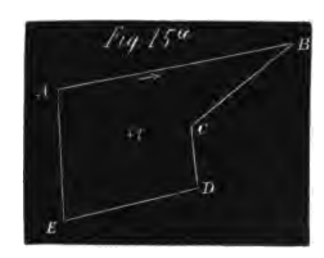
Es seien jetzt ω, ω_1 zwei Elemente, zwischen denen der Linienzug einmal vorbeigeht; der, welcher den Linienzug, der zwischen ω und ω_1 durchgeht, im gegebenen Sinne durchläuft, habe ω zur rechten und ω_1 zur linken Hand. Wir nehmen den Pol O auf der Verlängerung der Geraden $\omega_1 \omega \ldots$; wenn dann X den Theil des Linienzuges, der zwischen ω und ω_1 durchgeht, durchläuft, so wird der Radiusvector OX einmal mit positiver Rotation ω beschreiben, ohne ω_1 zu beschreiben, während für sämmtliche andere Theile des Linienzuges die Elemente ω und ω_1 gleichzeitig und in demselben Sinne beschrieben werden. Der Coefficient von ω wird also den

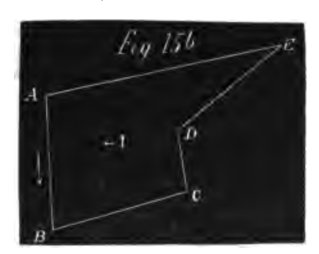
von ω_1 um 1 übersteigen, oder auch, wenn man von einem Raum zum andern benachbarten Raume übergehend einmal den Linienzug von rechts nach links überschreitet*), so übertrifft der Coefficient des ersten Raumes den des andern um 1 Einheit.

Der unendlichen Region S_0 gehört der Coefficient Null zu; denn ist ω_0 ein Element, das ausserhalb der Räume $S_1, S_2, \ldots$ liegt, so ist klar, dass man dem Pole O eine solche Lage geben kann, dass der (endliche) Radius CX niemals durch ω_0 hindurchgeht, wo auch auf dem Linienzuge X liegen mag.

Einem Raume, aus welchem man nach S_0 gelangen kann, indem man ein einziges mal den Linienzug überschreitet, kommt der Coefficient $+1$ oder -1 zu, jenachdem der Uebergang von rechts nach links oder von links nach rechts geschieht. Allgemein, wenn man von einem Punkte eines Raumes S eine Gerade bis zu einem Punkte von S_0 zieht, und diese Gerade den Linienzug m-mal von rechts nach links und n-mal von links nach rechts durchschneidet, so ist der Coefficient von S gleich $m-n$.

22. Wenn der Linienzug keinen Knotenpunkt besitzt, so haben wir einen einzigen endlichen Raum S und diesem kommt der Coefficient $+1$ oder -1 zu, jenachdem der Linienzug positiv (Fig. 15ᵃ)





oder negativ (Fig. 15ᵇ) durchlaufen ist. In diesem Falle haben wir also

$$\Sigma = \pm S,$$

d. h., ist der Linienzug nicht verschlungen, so ist die Summe Σ nichts anderes, als der Flächeninhalt des von ihm umschlossenen Raumes.

Diese Eigenschaft führt naturgemäss darauf, die Summe Σ als Definition des Flächeninhalts eines beliebig verschlungenen Linienzuges aufzustellen**).

---

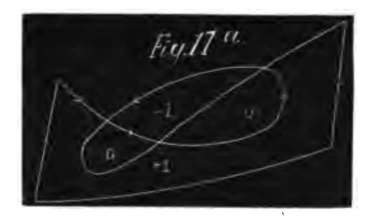
*) Von rechts nach links ist immer im Sinne desjenigen zu nehmen, welcher den Linienzug im gegebenen Sinne durchläuft; der betreffende Sinn ist in der Figur durch einen Pfeil angedeutet.

**) Möbius, *Ueber die Bestimmung des Inhalts eines Polyeders* (Berichte der Königl. Sächs. Gesellsch. der Wissenschaften zu Leipzig, 1865), § 13 u. ff.

23. Ein verschlungener Linienzug kann in nicht verschlungene Linienzüge zerlegt werden, und zwar indem man die (krummlinigen) Winkel, die von den Zweigen, welche in jedem Knotenpunkte zusammenlaufen, gebildet werden, auseinandertheilt, ohne jedoch den Sinn (d. h. die Richtung der Pfeile) der einzelnen Zweige zu ändern. Man sehe z. B. die Fig. 16 und 17; in jeder derselben ist ein verschlungener Linienzug in zwei gewöhnliche zerlegt; und die Fig. 18, wo ein verschlungener Linienzug in vier gewöhnliche Linienzüge sich auflöst. Die Räume mit negativen Coefficienten heben sich jetzt völlig von denen mit positiven Coefficienten ab; und von

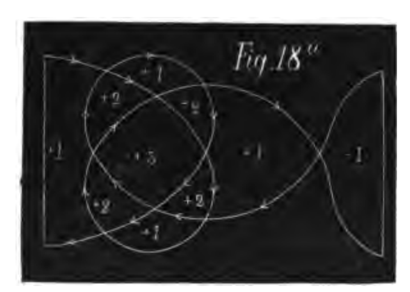




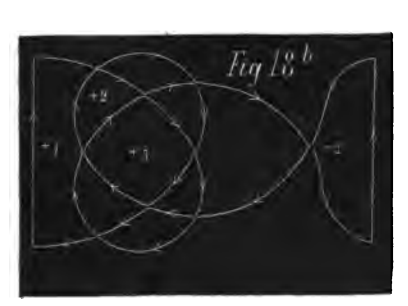




zwei Räumen mit Coefficienten von gleichem Zeichen, liegt derjenige, dessen Coefficient einen absolut grössern Werth hat, vollständig innerhalb des andern. So liegt z. B., wenn man mit S_r den Raum bezeichnet, dessen Coefficient r ist, S_2 innerhalb von S_1; S_3 innerhalb von S_2, ..., S_{-2} innerhalb von S_{-1}, ...



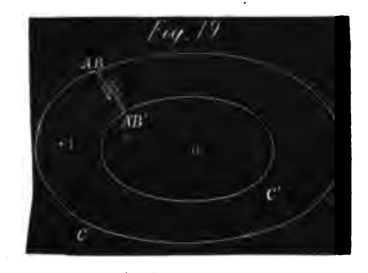
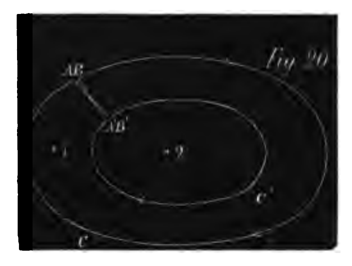
Daraus folgt, dass die Fläche Σ als Summe von Räumen erhalten werden kann, die sämmtlich die positive oder negative Einheit als Coefficienten haben. Zu dem Ende genügt es, die Fläche S_r einmal für sich allein und ein anderes mal mit der Fläche S_{r-1}, innerhalb deren sie liegt, zu nehmen, d. h. man summiert die Räume S_r und



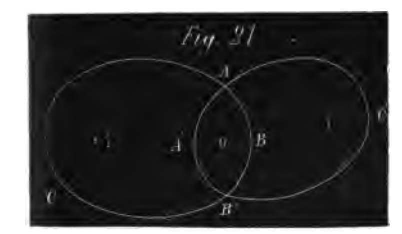
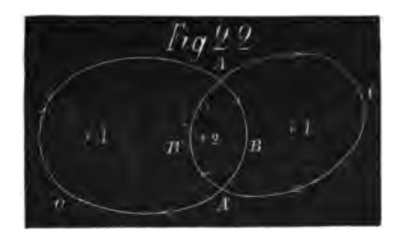
$S_{r-1} + S_r$ statt 2 S_r und S_{r-1} u. s. w. Man sehe Fig. 18, wo die Fläche gleich ist

$$S_3 + (S_2 + S_3) + (S_1 + S_2 + S_3) - S_{-1}*).$$

Unter Flächeninhalt eines Systems geschlossener Linienzüge versteht man die algebraische Summe der einzelnen Linienzüge. So ist z. B. der zwischen den beiden ovalen Curven in Fig. 19 enthaltene Ring der Flächeninhalt der Linienzüge ABC, A′C′B′; dagegen ist der Flächeninhalt der Linienzüge ABC, A′B′C′ (Fig. 20) gleich jenem Ringe plus dem doppelten innern Flächeninhalte A′B′C′. In beiden Fällen kann man für beide Linienzüge

einen einzigen AA′C′B′BCA (Fig. 19) oder AB′C′A′BCA (Fig. 20) substituieren, wo die Punkte B, B′ als den A, A′ unendlich nahe

angesehen werden. In Fig. 21 schneiden sich die beiden Linienzüge; der Flächeninhalt der Züge ABC, A′B′C′ ist gleichgeltend mit dem der Linienzüge AA′B′C, ABB′C′. In Fig. 22 ist die Fläche der Linienzüge ABC, A′B′C′ gleich derjenigen der Linienzüge ABA′B′, AC′A′CA. Die beiden Linienzüge können durch einen einzigen ersetzt werden.

24. Lehrsatz. — Wenn die geradlinigen Segmente A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ..., A_nB_n von gegebener Grösse und Lage in einer Ebene den Seiten eines Polygons (d. h. eines geradlinigen, geschlossenen,

*) CULMANN, *Graphische Statik* (Zürich, 1866), Nr. 14.

beliebig verschlungenen Linienzuges) äquipollent sind, so ist die Summe der Dreiecke

$$OA_1B_1 + OA_2B_2 + OA_3B_3 + \ldots . + OA_nB_n$$

constant für jede beliebige Lage des Punktes O. Sind aber die gegebenen Segmente nicht den Seiten eines geschlossenen Linienzuges äquipollent, so ist diese Summe nur für die Punkte O constant, welche von einer bestimmten Geraden gleichen Abstand haben.*)

Beweis. — Man construiere die gebrochene Linie CDE .... MN, deren aufeinanderfolgende Seiten CD, DE, ..., MN bezüglich den gegebenen Segmenten A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ..., A_nB_n äquipollent sind, so dass die Figuren A_1B_1DC, A_2B_2ED, ..., A_nB_nNM Parallelogramme sind.

Da nach Nr. 15

$$\begin{aligned} OA_1B &= OCD - A_1CD, \\ OA_2B_2 &= ODE - A_2DE, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ OA_nB_n &= OMN - A_nMN, \end{aligned}$$

und nach dem Satz in Nr. 19

$$OCD + ODE + \ldots + OMN + ONC = CDE \ldots MNC$$

ist, so erhalten wir, wenn wir addieren,

$$OA_1B_1 + OA_2B_2 + \ldots + OA_nB_n = CDE \ldots NC + OCN - (A_1CD + A_2DE + \ldots + A_nMN).$$

Wenn die gegebenen äquipollenten Segmente ein geschlossenes Polygon bilden, d. h., wenn der Punkt N mit C zusammenfällt, so ist der Flächeninhalt von OCN gleich Null, solange der Punkt O in endlicher Entfernung bleibt, und dann hat folglich die Summe

$$OA_1B_1 + OA_2B_2 + \ldots . OA_nB_n$$

einen von der Lage des Punktes O unabhängigen Werth. Folglich hat in dem Specialfalle $CN = 0$ die vorgenannte Summe entweder für sämmtliche Punkte O der Ebene den Werth Null, oder sie verschwindet für keinen einzigen Punkt O (in endlicher Entfernung). M. vergl. Nr. 48 und 49.

Fällt N nicht mit C zusammen, so wird die genannte Summe unverändert bleiben, so lange der Flächeninhalt des Dreiecks OCN sich nicht ändert, d. h., so lange als der Punkt O dieselbe Entfernung von der Geraden CN behält.

Verändern wir diesen Abstand, nehmen also einen neuen Pol O′ an, so erhalten wir

$$O'A_1B_1 + O'A_2B_2 + \ldots . + O'A_nB_n = CDE \ldots NC + O'CN - (A_1CD + A_2DE + \ldots + A_nMN).$$

---

*) APOLLONIOS, *Ebene Oerter,* Buch I. — L'HUILIER, *Polygonometrie,* 1789, p. 92. — MÖBIUS, *Statik,* § 46.

Nehmen wir den Punkt O′ in einer solchen Entfernung von CN, dass der Flächeninhalt des Dreiecks O′CN gleich

$$A_1CD + A_2DE + \ldots + A_nMN - CDE \ldots NC$$

wird, so wird die Summe

$$O'A_1B_1 + O'A_2B_2 + \ldots . + O'A_nB_n = 0.$$

Die zu CN parallele Gerade, welche der Ort der Punkte O′ ist, für welche diese Summe gleich Null ist, bezeichnen wir mit r. Nehmen wir auf ihr den Punkt C an, d. h. den willkürlichen Anfangspunkt der gebrochenen Linie CDE...., so ist der Flächeninhalt von O′CN gleich Null, und folglich wird die Summe der Dreiecke

$$A_1CD + A_2DE + \ldots . + A_nMN$$

gleich dem Flächeninhalte von CDE...MNC. Halten wir diese Wahl des Anfangspunktes C fest, d. h., setzen wir voraus, C sei ein Punkt der Geraden r, so haben wir für einen beliebigen Punkt O

$$OA_1B_1 + OA_2B_2 + \ldots . = OCN.$$

25. In dem speciellen Falle, dass die gegebenen Segmente sämmtlich den Anfangspunkt C gemein haben, ist die Summe der Dreiecke

$$A_1CD + A_2DE . + \ldots + A_nMN, \text{ oder auch } CDE + \ldots . + CMN$$

identisch mit dem Flächeninhalte des Polygons CDE ... NC (Nr. 22); also muss dann der gemeinschaftliche Punkt C ebenfalls ein Punkt der Gerade r sein. Das heisst, in diesem Falle coincidiert r mit der Geraden CN, welche die Endpunkte der gebrochenen Linie CDE...MN verbindet.

Derselbe Schluss bleibt gültig, wenn die gegebenen Segmente auf Geraden liegen, welche sämmtlich in ein und denselben Punkt C zusammenlaufen; dann kann man nämlich für das Dreieck OA_rB_r das Dreieck OCB'_r substituieren, sobald die Segmente A_rB_r und CB'_r derselben Geraden angehören und nach Grösse und Richtung einander gleich sind.

26. Aus dieser Eigenschaft der Geraden r für den Fall, dass die gegebenen Segmente auf Geraden liegen, welche sämmtlich durch denselben Punkt gehen, entnimmt man eine Methode, die Gerade r auch in dem allgemeinen Falle zu construieren, wenn die gegebenen Segmente irgendwie in der Ebene gelegen sind. Es sei C der Punkt, in welchem sich A_1B_1 und A_2B_2 schneiden. Mit C als Anfangspunkt construiere man das Dreieck CDE, dessen Seiten CD, DE den Geraden A_1B_1, A_2B_2 äquipollent sind; dann ist nach dem eben Bewiesenen für jede Lage des Poles O

$$OCE = OA_1B_1 + OA_2B_2.$$

Es sei jetzt P der Punkt, in welchem CE die Gerade A_3B_3 trifft; mit P als Anfangspunkt construiere man das Dreieck PQR, dessen Seiten PQ, QR den Segmenten CE, A_3B_3 äquipollent sind, dann ist:

$$OPR = OCE + OA_3B_3 = OA_1B_1 + OA_2B_2 + OA_3B_3.$$

Geht man so weiter, so gelangt man zuletzt zu einem Segment AB, für welches

$$OAB = OA_1B_1 + OA_2B_2 + \dots + OA_nB_n.$$

Dieses Segment AB gehört der gesuchten Geraden r an, und ist der Geraden CN äquipollent, welche die Endpunkte der gebrochenen Linie CDE... MN verbindet, deren Seiten der Reihe nach den gegebenen Segmenten äquipollent sind.

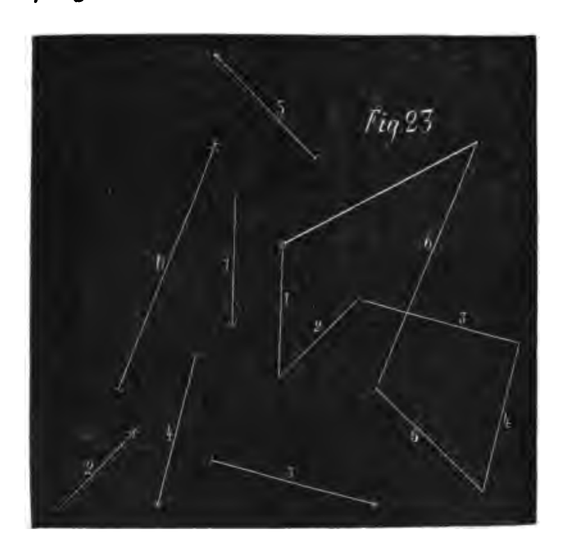
27. Da im allgemeinen Falle, dass CN von Null verschieden ist, alle Punkte O, für welche die Summe

$$OA_1B_1 + OA_2B_2 + \dots + OA_nB_n$$

denselben Werth hat, auf einer bestimmten Geraden liegen (Nr. 24), so giebt es nur eine einzige Gerade r, den Ort der Puncte O, für welche obige Summe gleich Null ist. Daraus folgt, dass für jede beliebige Ordnung, in welcher man die gegebenen Segmente bei der obigen Construction verwendet, man stets auf eine und dieselbe Gerade r kommen wird.

II. GRAPHISCHE ADDITION.

28. Mehrere nach Grösse und Richtung gegebene Segmente 1, 2, 3,...., n geometrisch summieren oder zusammensetzen,



bedeutet, einen polygonalen Linienzug construieren, dessen Seiten der Reihe nach den gegebenen Segmenten äquipollent sind (Fig. 23).

Die Gerade $S_{1,\ldots,n}$, welche vom Anfangs- nach dem Endpunkte des so construierten Linienzuges geht, heisst die geometrische Summe oder die Resultante der gegebenen Segmente*); diese Letztern heissen ihre Componenten.

Wenn die gegebenen Segmente sämmtlich unter sich parallel sind, so reduciert sich der polygonale Linienzug auf eine gerade Linie oder eine Punktreihe, deren aufeinanderfolgende Segmente 01, 12, 23, ... (Fig. 24), oder 11, 22, 33, ... (Fig. 25) der Reihe nach den gegebenen äquipollent sind. In diesem Falle ist die Resultante der gegebenen Segmente mit ihrer algebraischen Summe identisch. Die beiden Figuren geben zwei verschiedene Arten an, eine Reihe von Segmenten zu zeichnen, welche sich auf einer geraden Linie stetig folgen.





29. Aus der eben gegebenen Definition folgt, dass die Resultante $S_{1,\ldots,n}$ der n gegebenen Segmente 1, 2, ..., n mit der Resultante der beiden Segmente $S_{1,\ldots,r}$, $S_{r+1,\ldots,n}$ identisch ist, von denen das erste die Resultante der ersten r gegebenen Segmente ist, und das zweite die Resultante der n — r übrigen. Denn die Geraden $S_{1,\ldots,n}$ und $S_{1,\ldots,r}$ haben mit dem Segmente 1 den Anfangspunkt gemein, und die Geraden $S_{1,\ldots,n}$ und $S_{r+1,\ldots,n}$ mit dem Segmente n den Endpunkt; also fängt $S_{1,\ldots,n}$ mit $S_{1,\ldots,r}$ zugleich an und endigt zugleich mit $S_{r+1,\ldots,n}$. Die Fig. 26 entspricht $n=8$, $r=5$, d. h. sie zeigt, dass die Resultante der Abschnitte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 mit der geometrischen Summe nur zweier Componenten zusammenfällt, von denen die eine die Resultante der Segmente 1, 2, 3, 4, 5, und die andere die Resultante der Segmente 6, 7, 8 ist.

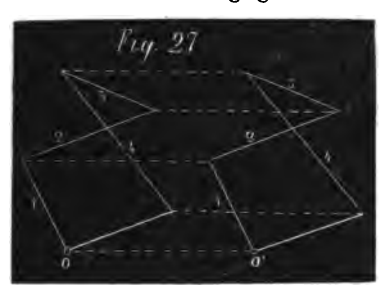


Daraus folgert sich, dass, wenn wir die gegebenen Segmente (immer in der gegebenen Ordnung genommen) in eine beliebige Zahl von Gruppen theilen,

*) Chelini, *Saggio di geometria analitica, trattata con nuovo metodo* (Roma, 1838), p. 35. — Bellavitis, *a. a. O.*, Nr. 5. — Culmann, *a. a. O.*, S. 4.

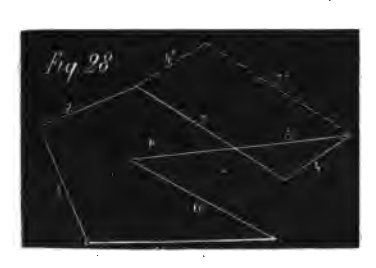
und wir die Segmente jeder Gruppe vereinigen, die Summe der so erhaltenen Partialresultanten Segmente sein werden, deren Resultante mit der Resultante sämmtlicher gegebener Segmente zusammenfällt.

30. Die Resultante mehrerer gegebener Segmente ist von der Lage des Punktes, welcher als Anfangspunkt des Linienzuges angenommen wird, unabhängig. Denn die Linienzüge, welche man mit zwei verschiedenen Anfangspunkten O, O′ construieren würde, sind gleiche (congruente) Figuren und gleichliegend; die zweite kann man erhalten, indem man die erste sich in der Art bewegen lässt, dass jeder ihrer Punkte eine der Geraden OO′ äquipollente Gerade beschreibt. (Fig. 27.)



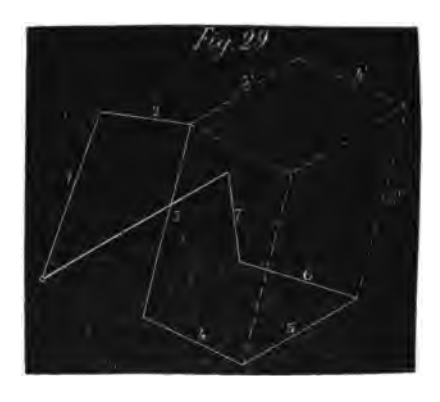
31. **Lehrsatz.** — Die Resultante $S_{1,\ldots,n}$ mehrer gegebener Segmente 1, 2, 3, ..., n ist von der Ordnung, in welcher man die Zusammensetzung vornimmt, unabhängig.

Beweis. — Wir beginnen mit dem Beweise, dass zwei aufeinander folgende Segmente, z. B. 3, 4 (Fig. 28), sich untereinander vertauschen lassen. In der gegebenen Ordnung ist die Resultante sämmtlicher Segmente auch die Resultante der drei Partialresultanten $S_{1,2}$, $S_{3,4}$, $S_{5,\ldots,n}$. In der neuen Ordnung ist die Resultante sämmtlicher Segmente dem analog die Resultante der Partialresultanten $S_{1,2}$, $S_{4,3}$, $S_{5,\ldots,n}$. Nun sind aber $S_{3,4}$ und $S_{4,3}$ ein und dieselbe Gerade, die Diagonale des Parallelogramms, welches man erhält, wenn man zuerst zwei aufeinander folgende den gegebenen 3,4 äquipollente Segmente zeichnet, und dann von demselben Anfangspunkte aus zwei andere aufeinander folgende denselben gegegebene äquipollente Segmente aber in umgekehrter Ordnung 4′, 3′. Die Vertauschung der Segmente 3, 4 hat also auf die gesuchte Resultante gar keinen Einfluss.



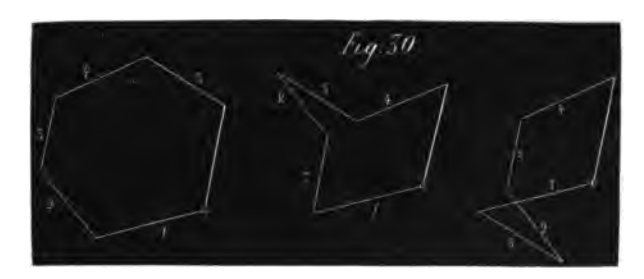
Vertauschen wir zuerst 3 mit 4, dann 3 mit 5, endlich 5 mit4, so ist der Totaleffect der, dass die Segmente 3 und 5 mit ein-

ander vertauscht sind (Fig. 29). Im Allgemeinen erhält man die Vertauschung zweier beliebiger nicht aufeinanderfolgender Segmente in derselben Weise mittelst Vertauschung aufeinanderfolgender.



Also bleibt die Resultante mehrerer Segmente unverändert, wenn man zwei beliebige Segmente unter einander vertauscht; oder auch, die Resultante ist von der Ordnung, in welcher die Segmente zusammengesetzt werden, unabhängig.

Die Fig. 30 zeigt verschiedene Linienzüge, die mit denselben Segmenten gebildet sind, in den verschiedenen Ordnungen 12345, 13254, 15324 genommen.



32. Kann man mit den gegebenen Segmenten einen geschlossenen Linienzug bilden, so haben in Folge des vorhergehenden Satzes sämmtliche Linienzüge, die man durch Veränderung der Ordnung bei der Zusammensetzung erhält, dieselbe Eigenschaft. In diesem Falle ist die Resultante der gegebenen Segmente gleich Null. Oder auch:

Die Resultante mehrerer Segmente verschwindet, wenn diese den Seiten eines geschlossenen Polygons äquipollent sind.

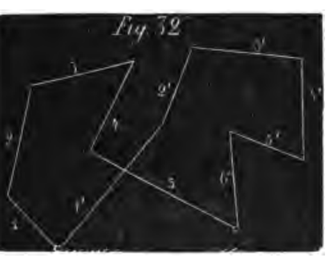
Der einfachste Fall, in dem die Resultante verschwindet, ist der von nur zwei Segmenten, von denen das eine dem andern in entgegengesetztem Sinne äquipollent ist.

33. Sind unter den Segmenten, deren Resultante man sucht, einige, aus denen man ein geschlossenes Polygon bilden kann, so können diese sämmtlich ausgelassen werden, ohne die gesuchte



Resultante zu verändern. In Fig. 31 fällt die Resultante der Segmente 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 mit der Resultante der Segmente 1, 2, 8, 9 zusammen, weil die Resultante von 3, 4, 5, 6, 7 gleich Null ist.

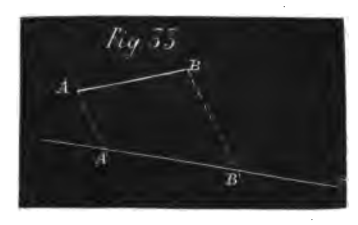
33*. Werden die Componentensegmente in einem gegebenen Verhältniss vergrössert, so vergrössert sich auch die Resultante in demselben Verhältniss, ohne ihre Richtung zu verändern.



34. Zwei Reihen von Segmenten haben gleiche (äquipollente) Resultanten, sobald nach Construction der beiden entsprechenden Linienzüge von demselben Anfangspunkte aus die Endpunkte der beiden Linienzüge zusammenfallen (Fig. 32). Verbindet man die Segmente der einen Reihe mit den in entgegengesetztem Sinne genommenen Segmenten der andern Reihe, so ist die Gesammtresultante gleich Null.

35. Zwei Reihen von Segmenten haben gleiche Resultanten, aber von entgegengesetztem Sinn, sobald nach Construction der entsprechenden Linienzüge der Art, dass der Anfangspunkt des zweiten mit dem Endpunkt des ersten zusammenfällt, dann auch der Endpunkt des zweiten Linienzuges mit dem Anfangspunkt des ersten zusammenfällt. Setzen wir die Segmente der einen Reihe mit denen der andern zusammen, so ist die Gesammtresultante gleich Null. Umgekehrt, ist die Resultante mehrerer Segmente gleich Null, und man setzt sie in zwei verschiedenen Gruppen zusammen, so ist die Resultante der ersten Gruppe der der zweiten Gruppe gleich und entgegengesetzt.

36. Die Subtraction ist keine von der Addition verschiedene Operation. Ein Segment 1 von einem Segmente 2 subtrahieren heisst, das Segment 2 mit einem zu 1 äquipollenten Segmente, das in entgegengesetztem Sinne genommen wird, zusammensetzen.



37. Haben zwei Reihen von Segmenten gleiche (äquipollente) Resultanten, so erhält man, wenn man beiden dasselbe Segment hinzufügt oder wegnimmt, zwei neue Reihen, deren Resultanten ebenfalls noch gleich (äquipollent) sind.

38. Es ist ein Segment AB (Fig. 33)

und eine Gerade r gegeben; zieht man durch A und B in einer beliebig bestimmten Richtung zwei parallele Gerade, bis sie die r in zwei Punkten A′, B′ schneiden, so heissen die Punkte A′, B′ die **Projectionen** der Punkte A, B, und das Segment A′B′ heisst die **Projection** des Segmentes AB. Die Geraden AA′, BB′ heissen die **Projectionsstrahlen**.

Die Projectionen zweier äquipollenter Segmente sind unter sich äquipollent (so lange man wenigstens die Richtung von r und die der Projectionsstrahlen nicht ändert).

39. Es sei (Fig. 34) ABC ... MNA ein geschlossener Linienzug, A′, B′, C′, ..., M′, N′ die Projectionen der Scheitel desselben; da A′, B′, ... Punkte in gerader Linie sind, hat man (Nr. 4) $A'B' + B'C' + \ldots + M'N' + N'A' = 0$; d. h.: **Die Summe der Projectionen der Seiten eines geschlossenen Linienzuges ist gleich Null.**



Es seien $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ n Segmente in einer Ebene, deren Resultante gleich Null ist, das will sagen, n Segmente, welche die Grösse und Richtung der Seiten eines geschlossenen Polygons haben. Da die Projectionen der Seiten eines geschlossenen Polygons Null zur Summe haben, und da die Projectionen zweier äquipollenter Segmente einander gleich sind, so muss die Summe der Projectionen der gegebenen Segmente verschwinden.

Mehrere gegebene Segmente bilden mit einem andern Segmente, das ihrer Resultante gleich und entgegengesetzt ist, ein Segmentensystem, dessen Resultante gleich Null ist; folglich gilt der Satz:

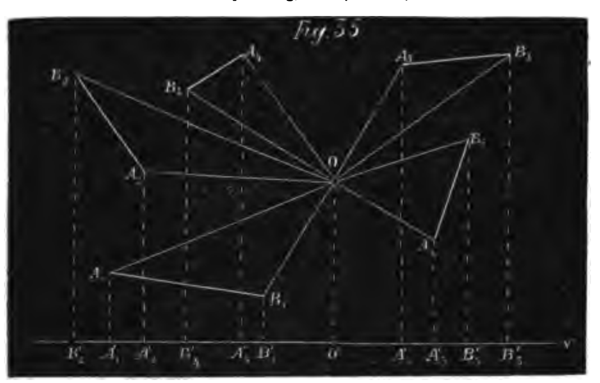
Die Projection der Resultante mehrerer gegebener Segmente ist der Summe der Projectionen der gegebenen Segmente gleich.

Daraus schliesst man unmittelbar:

Haben zwei Segmentreihen gleiche Resultanten, so ist die Summe der Projectionen der Segmente der einen Reihe gleich der Summe der Projectionen der Segmente der andern.

40. Es seien (Fig. 35 a. f. S.) in einer Ebene n Segmente $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ gegeben, deren Resultante gleich Null ist. Nimmt man einen beliebigen Punkt O als Pol, so kann man A_rB_r als Resultante der Segmente A_rO, OB_r ansehen; es wird also die Resultante der Segmente $A_1O, OB_1, A_2O, OB_2, \ldots, A_nO, OB_n$ verschwinden, d. h. (Nr. 35), die Resultante der Segmente $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$ ist gleich der Resultante der Segmente $OB_1, OB_2, \ldots, OB_n$.

Umgekehrt. Man hat zwei Gruppen von je n gegebenen Punkten $A_1 A_2 \ldots A_n, B_1 B_2 \ldots B_n$. Ist nun die Resultante der Geraden $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$, die durch Verbindung eines beliebigen Poles O mit den Punkten der ersten Gruppe entstehen, gleich der Resultante der Geraden $OB_1, OB_2, \ldots, OB_n$, welche von demselben



Pole aus nach den Punkten der zweiten Gruppe gezogen sind, so ist die Resultante der Segmente A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n, welche die Punkte der einen Gruppe mit denen der andern verbinden, gleich Null (dabei können die Punkte der einen Gruppe mit denen der andern Gruppe vollständig beliebig combiniert werden, wenn nur kein Punkt ausgelassen noch mehr als einmal benutzt wird). In der That folgt aus der Voraussetzung (Nr. 34), dass die Resultante der Segmente $A_1O, A_2O, \ldots, A_nO, OB_1, OB_2, \ldots, OB_n$ gleich Null ist; die Resultante von A_rO und OB_r ist A_rB_r, also ist auch die Resultante der Segmente A_1B_1, $A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ gleich Null.

41. Hieraus folgt unter Berücksichtigung des ersten Satzes (Nr. 39), dass für einen neu gewählten Punkt O′ die Resultante der Segmente $O'A_1, O'A_2, \ldots, O'A_n$ gleich der Resultante von $O'B_1$, $O'B_2, \ldots, O'B_n$ ist. Also hat man*):

> Ist für zwei Gruppen von n Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$; $B_1, B_2, \ldots, B_n$ und einem bestimmten Pol O die Resultante der Segmente OA_1, OA_2, ..., OA_n gleich der der Segmente OB_1, $OB_2, \ldots, OB_n$, so besteht dieselbe Gleichung für jeden beliebigen andern Pol O′. Ausserdem ist die Resultante der n Segmente, welche die Punkte der einen Gruppe mit denen der andern Gruppe in beliebiger Ordnung genommen verbinden, gleich Null.

*) Grassmann, *Die Ausdehnungslehre* (Leipzig, 1844), S. 41.

42. Unter Festhaltung der für die beiden Gruppen von n Punkten gemachten Voraussetzung projiciere man dieselben in den Punkten $A'_1, A'_1, \ldots, A'_n$; $B'_1, B'_1, \ldots, B'_n$ auf eine Gerade r mittelst Strahlen, die einer willkürlich festgesetzten Richtung parallel sind. Nimmt man den Pol O auf der Geraden r an*), so kann man den Strahl OA_r als aus der Zusammensetzung der beiden OA'_r, A'_rA_r entstanden ansehen u. s. w.; die Resultante der Segmente OA', $OA'_2, \ldots, OA'_n$, A'_1A', $A'_2A', \ldots, A'_nA_n$ ist daher gleich der Resultante von OB'_1, $OB'_2, \ldots, OB'_n$, B'_1B_1, $B'_2B_2, \ldots, B'_nB_n$. Aber (Nr. 38) die Resultante oder Summe der Segmente OA'_1, $OA'_2, \ldots, OA'_n$ ist gleich der der Segmente OB'_1, $OB'_2, \ldots, OB'_n$, da diese Segmente sämmtlich Projectionen zweier anderer Segmentreihen sind, deren Resultanten einander gleich sind; also hat man:

Ist für zwei Gruppen von n Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$; $B_1, B_2, \ldots, B_n$ um einen bestimmten Pol O die Resultante der Segmente $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$ gleich der Resultante der Segmente OB_1, $OB_2, \ldots, OB_n$, und man projiciert sämmtliche Punkte auf dieselbe Gerade mittelst Strahlen, die einer beliebig gewählten Richtung parallel sind, so ist die Summe der Projectionsstrahlen der Punkte der ersten Gruppe gleich der Summe der Projectionsstrahlen der Punkte der zweiten Gruppe.

43. Bis jetzt haben wir die Resultante mehrerer Segmente definiert, indem wir allein auf ihre Grösse, Richtung und ihren Sinn Rücksicht nahmen, nicht aber auf ihre absolute Lage. Wir wollen jetzt eine andere Definition geben, welche, viel allgemeiner, die vorhergehende (Nr. 28) in sich schliesst, und sämmtliche Elemente der resultierenden Geraden von n gegebenen Segmenten enthält.

Sind (nach Grösse, Lage und Sinn) n Segmente $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ gegeben, so verstehen wir unter Resultante derselben ein Segment AB von solcher Grösse, Lage und solchem Sinn, dass für einen beliebigen Pol O der Flächeninhalt von OAB gleich der Summe der Flächeninhalte von $OA_1B_1 + OA_2B_2 + \ldots + OA_nB_n$ ist (Nr. 24, 27).

44. Der Kürze halber wollen wir das Dreieck OAB das Dreieck nennen, welches das Segment von O aus projiciert. Der Sinn AB dieses Segmentes zeigt die Art an, in welchem der Linienzug OAB durchlaufen ist, oder, was dasselbe ist, das Zeichen des Flächeninhaltes OAB.

---

*) Man sehe Fig. 35, wo man die Gerade r sich so verschoben denke, dass die Punkte O und O′ zusammenfallen.

Dies vorausgeschickt können wir sagen: **Unter Resultante mehrerer gegebener Segmente versteht man ein solches Segment, für welches der Flächeninhalt des Dreiecks, welches dasselbe von einem willkürlichen Pole O aus projiciert, gleich der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke wird, welche von demselben Pole aus die gegebenen Segmente projicieren.**

Da die Fläche des Dreiecks OAB sich nicht verändert, wenn man das Segment AB auf der Geraden, der es angehört, verschiebt, so wird die Resultante mehrerer gegebener Segmente sich nicht ändern, wenn diese beliebig jedes auf der Geraden, der es angehört, verschoben werden.

45. Schon aus dem Satze in Nr. 24 ergiebt sich, dass, wenn man einen polygonalen Linienzug CDE...MN construiert, dessen Seiten CD, DE, ..., MN der Reihe nach den gegebenen Geraden $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ äquipollent sind, das Segment NC der Resultante AB äquipollent ist. Ist der Linienzug geschlossen, d. h., fällt N mit C zusammen, und ist die Summe der Flächeninhalte $OA_1B_1 + OA_2B_2 + \ldots + OA_nB_n$ nicht gleich Null, so hat die gesuchte Resultante die Grösse Null und liegt in unendlicher Entfernung. Ist der Linienzug geschlossen, und ausserdem obige Summe gleich Null, so ist die Grösse der Resultante ebenfalls gleich Null, und die Lage derselben unbestimmt; in diesem Falle lässt also die gegebene Reihe von Segmenten überhaupt keine Resultante zu.

46. Wenn aber N nicht mit C zusammenfällt, so wird die Aufgabe in einer einzigen Weise durch ein Segment AB von endlicher Grösse und in endlicher Entfernung liegend gelöst. Da wir schon die Grösse, die Richtung und den Sinn desselben kennen, wird es, um die Lage vollkommen zu individualisieren, genügen, einen Punkt der Geraden zu finden, von der es einen Theil bildet. Zu diesem Zwecke kann man sich der Construction in Nr. 26 bedienen, oder auch der folgenden bei weitem einfacheren (Fig. 36).

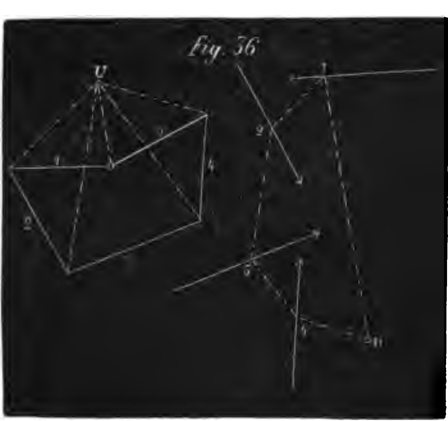


Fig. 36

Wir beginnen mit der Construction eines polygonalen Linienzuges, dessen Seiten, die wir hier mit den Zahlen 1, 2, ..., n be-

zeichnen wollen, der Reihe nach den gegebenen Segmenten äquipollent sind; dann ist die Resultante dem Segmente 0, welches den Linienzug schliesst, in entgegengesetztem Sinne genommen äquipollent, das heisst, sie ist dem Segmente gleich und entgegengesetzt, welches vom Endpunkte der Seite n nach dem Anfangspunkte der Seite 1 geht. Wir wählen nun beliebig einen Punkt U und ziehen von ihm aus die Strahlen $UV_{01}, UV_{12}, UV_{23}, \ldots, UV_{n0}$ *) nach den Scheiteln des Linienzuges; dabei bedeutet $V_{i.i+1}$ den Scheitel, welcher Endpunkt der Seite i (äquipollent zu A_iB_i) und Anfangspunkt der Seite i + 1 (äquipollent zu $A_{i+1}B_{i+1}$) ist.

Jetzt construieren wir einen zweiten polygonalen Linienzug, dessen Scheitel 1, 2, ..., n der Reihe nach in die Geraden fallen, denen bezüglich die Segmente $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ angehören, und dessen Seiten 01, 12, ..., n0 der Reihe nach den Strahlen UV_{01}, $UV_{12}, \ldots, UV_{n0}$ parallel sind. Die äussersten Seiten 01, n0 schneiden sich hinreichend verlängert in einem Punkte 0, der der gesuchten resultierenden Geraden angehört. **).

Beweis. — Ich denke das Segment A_1B_1 in zwei zerlegt, welche in den Seiten 01, 12 des zweiten Polygons liegen und den Strahlen $U_{01}U, UV_{12}$ des ersten äquipollent sind; in gleicher Weise denke ich das Segment A_2B_2 in zwei zerlegt, welche in den Seiten 12, 23 des zweiten Polygons liegen und den Strahlen $V_{12}U, UV_{23}$ äquipollent sind; u. s. w., bis zuletzt auch A_nB_n in zwei Segmente zerlegt ist, welche in den Seiten n—1 . n, n0 liegen und den Strahlen $V_{n-1.n}U, UV_{n0}$ äquipollent sind.

Nehmen wir beliebig einen Pol O, so ist der Flächeninhalt des Dreiecks, welches von ihm aus eines der gegebenen Segmente projiciert, gleich der Summe der beiden Dreiecke, welche von demselben Pole aus die beiden Componentensegmente projicieren; folglich fällt die Resultante der n Segmente $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ mit der Resultante der 2n componierenden Segmente zusammen, in welche die gegebenen zerlegt sind. Nun liegt das erste dieser 2n Segmente auf 01 und ist $V_{01}U$ äquipollent, und das letzte liegt auf n0 und ist UV_{n0} äquipollent, während die sämmtlichen übrigen, 2(n—1) an Zahl, zu zwei und zwei einander gleich, entgegengesetzt und auf ein und derselben Seite des zweiten Polygons gelegen sind. Z. B. liegt das zweite und dritte der Componentensegmente auf der Seite 12, und sie sind respective UV_{12} und $V_{12}U$ äquipollent.

Die Flächeninhalte der beiden Dreiecke, welche von O aus diese beiden Segmente projicieren, sind einander gleich, aber entgegengesetzt; die Resultante der gegebenen Segmente ist daher

---

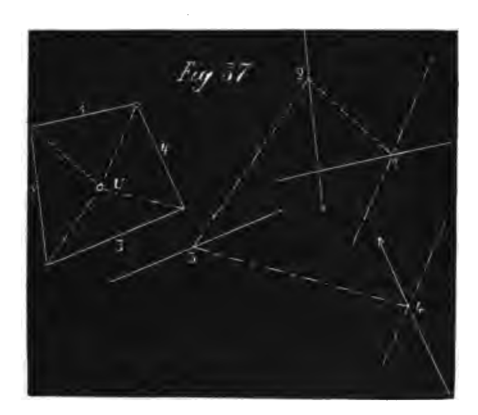
*) In Fig. 36 sind alle Buchstaben V, A, B weggelassen, und es ist n = 4.

**) CULMANN, *a. a. O.*, Nr. 87.

nichts anderes als die Resultante des ersten und letzten Componentensegmentes, von denen das erste auf 01 liegt und $V_{01}U$ äquipollent ist, und das andere in n0 liegt und äquipollent zu UV_{n0} ist. Die Resultante zweier Segmente geht aber (Nr. 25) durch den gemeinschaftlichen Punkt der Geraden, denen jene angehören, folglich geht die gesuchte Resultante durch den gemeinsamen Punkt der äussersten Seiten 01, n0 des zweiten Polygons.

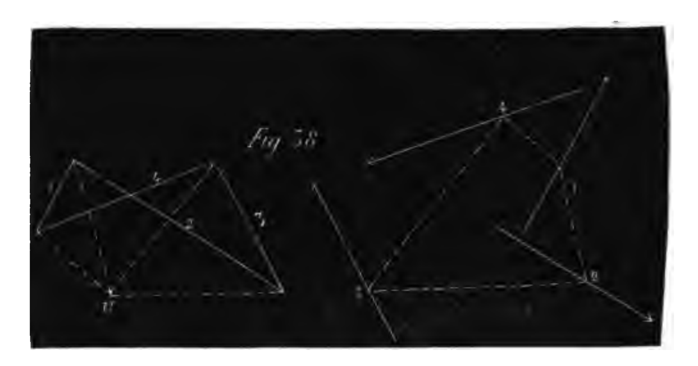
47. Wäre der Punkt U zufällig mit den beiden äussersten Punkten V_{01}, V_{n0} des ersten Linienzuges in gerader Linie angenommen, so würden die äussersten Strahlen UV_{01}, UV_{n0} zusammenfallen, und folglich die äussersten Seiten 01, n0 des zweiten Polygons parallel werden. In diesem Falle gäbe also die Construction keinen in endlicher Entfernung liegenden Punkt der gesuchten Resultante. Man würde aber unmittelbar genanntem Uebelstande abhelfen, wenn man einen neuen Pol U′ ausserhalb der Geraden V_{01}, V_{n0} annähme, und dann, wie oben auseinandergesetzt, fortschritte.

48. Wenn das nicht ist, so kann es eintreten (Fig. 37), dass der Punkt V_{n0} mit V_{01} zusammenfällt, und also für jeden beliebigen Pol U die äussersten Strahlen aufeinander liegen, folglich die Seiten 01, n0 entweder parallel sind oder zusammenfallen. Sind sie parallel, so ist die Summe $OA_1B_1 + OA_2B_2 + \dots$ gleich der Summe der beiden Dreiecke, deren Scheitel in O, und deren den gleichen und entgegengesetzten Strahlen $V_{01}U$, UV_{01} äquipollente Grundlinien in den genannten Seiten 01, n0 liegen, oder auch (Nr. 15) gleich der Hälfte eines Parallelogramms, dessen Gegenseiten jene Grundlinien sind. In diesem Falle ist die Resultante gleich Null und liegt in unendlicher Entfernung; und die Summe $OA_1B_1 + OA_2B_2 + \dots$ hat einen von Null verschiedenen constanten Werth, wo auch (in endlicher Entfernung) der Punkt O liegen mag.



49. Fallen dagegen (Fig. 38 a. f. S.) die Seiten 01, n0 zusammen, d. h. fallen die Gegenseiten des Parallelogramms zusammen, so verschwindet die Summe $OA_1B_1 + OB_2B_2 + \dots + OA_nB_n$ für jeden beliebigen Punkt O. In diesem Falle ist jedes beliebige gegebene Segment in umgekehrtem Sinne genommen die Resultante der übrigen n—1 Segmente.

50. Man nehme die gegebenen Segmente A_1B_1, A_2B_2, ... sämmtlich unter einander parallel an. In diesem Falle reduciert

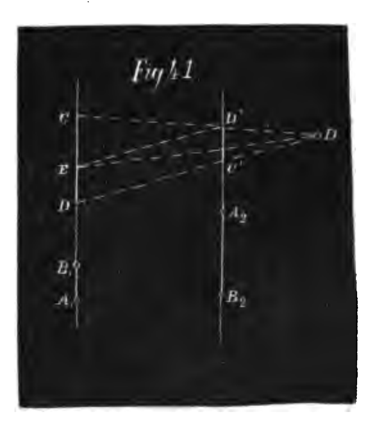


sich (Fig. 39) der erste polygonale Linienzug $V_{01}V_{12}V_{23}\dots V_{n0}$ auf eine gerade Linie, sonst aber bleibt die Construction des zweiten Polygons genau dieselbe wie im allgemeinen Falle. Die Resultante ist den Componenten parallel.



51. Sind nur zwei Segmente A_1B_1, A_2B_2 gegeben, so kann man die Construction auf folgende zurückführen (Fig. 40 und 41). In der unbegrenzten Geraden $A_1B_1\dots$ nehme man das Segment CD, das A_2B_2 äquipollent ist, und in der unbegrenzten Geraden $A_2B_2\dots$ ein Segment C′D′, das A_1B_1 äquipollent ist. Der gemeinsame Schnittpunkt der Geraden CD′, C′D gehört dann der Resultante, welche gesucht wird,





an. Denn, zieht man D'E parallel zu C'D und verbindet O mit E, so repräsentieren C, D, E die Scheitel V_{01}, V_{12}, V_{20} des ersten Linienzuges und O vertritt den Punkt U; die Punkte D', E sind die Scheitel 1, 2 des zweiten Polygons, das hier durch das Dreieck OD'E dargestellt wird, und O repräsentiert auch den Durchschnittspunkt der äussersten Seiten dieses zweiten Polygons.

Aus den ähnlichen Dreiecken OCD, OD'C' ergibt sich:

$$OC' : OD = C'D' : DC$$
$$= A_1B_1 : B_2A_2,$$

das heisst:

Das Verhältniss der Abstände der Resultante zweier paralleler Segmente von diesen Segmenten ist dem Verhältniss der componierenden Segmente reciprok und von entgegengesetztem Zeichen.

III. MULTIPLICATION.

52. Eine Gerade a mit dem Verhältnisse zweier anderen Geraden b : c multiplicieren heisst, eine vierte Gerade x finden, so dass die geometrische Proportion besteht:

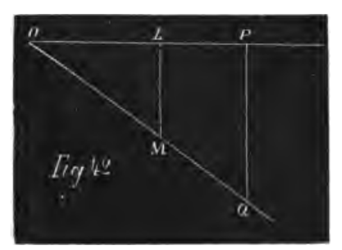
$$c : b = a : x.$$

Zu diesem Zwecke genügt es, zwei ähnliche Dreiecke OLM, O'PQ zu construieren, von denen Folgendes gilt:

im ersten sind zwei Linien (zwei Seiten, oder Grundlinie und Höhe, u. s. w.) gleich oder proportional zu c, b; und im zweiten ist die Linie a homolog zu c; x ist dann die homologe Linie von b im zweiten Dreiecke; oder

im ersten sind zwei Linien gleich oder proportional zu c, a; und im zweiten die Linie b homolog zu c; dann ist x die zu a homologe Linie des zweiten Dreiecks.

53. Die respective Lage der beiden Dreiecke ist völlig willkürlich; und die Wahl der einen oder andern gibt Gelegenheit zu verschiedenen Constructionen. Die Auswahl wird meistens durch die Lage, in welcher die Segmente a, b, c gegeben sind, oder von der, in welcher man x zu erhalten wünscht, vorgezeichnet werden.

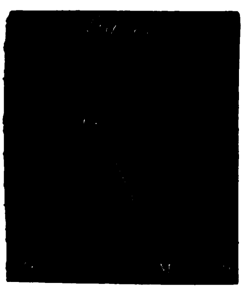


a) So haben z. B. in Fig. 42 die beiden Dreiecke den Winkel O gemein und parallele Gegenseiten. Nimmt man



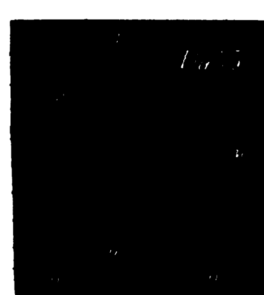
an, dass in ihnen OP, OM, OL die Segmente a, b, c darstellen, so ist OQ = x. Ist dagegen OL = c, OP = a, LM = b, so ist PQ = x.

b) In Fig. 43 sind dagegen die dem gemeinsamen Winkel O gegenüberliegenden Seiten antiparallel, d. h. die Winkel OML, OQP sind gleich (und folglich auch die Winkel OLM, OPQ).



c) Es können (Fig. 44) c und a die Höhen der beiden Dreiecke sein; nimmt man noch an, es sei b eine Seite OM oder LM des ersten Dreiecks, so ist OQ oder PQ = x.

d) Oder auch, es seien c und a dargestellt durch OL, OP oder durch OM, OQ, und b sei die Höhe des Dreiecks OLM, dann ist x die Höhe des andern Dreiecks OPQ.



e) Wenn (Fig. 45) die Linien OM = b, O′P = a aufeinander senkrecht angeordnet sind, und c > b, so kann man in folgender Art vorgehen. Man construiere das Dreieck OLM, dessen Seite LM parallel zu O′P, während die Hypothenuse OL = c ist. Zieht man PQ parallel zu OL, und O′Q senkrecht auf PQ, so sind die rechtwinkligen Dreiecke OLM, O′PQ ähnlich wegen der gleichen Winkel L, P; also ist O′Q = x. — Die Gerade O′Q, senkrechte Projection von O′P auf eine zu OL senkrechte Gerade, heisse Antiprojection von O′P auf OL. Sind also a und b aufeinander senkrecht, so ist x die Antiprojection von a auf c.

54. Eine Gerade a durch das Verhältniss zweier anderer Geraden b : c dividieren bedeutet so viel als a mit dem Verhältniss c : b multiplicieren.

Die Theilung einer Geraden a in n gleiche Theile ist dasselbe wie a mit c : b multiplicieren, wo c ein beliebiges Segment, und b n-mal so gross als c ist.

Soll eine Gerade b in Theile getheilt werden, die gegebenen Segmenten $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ein und derselben Geraden proportional sind, so braucht man nur diese Segmente mit dem Verhältniss b : c zu multiplicieren, wo $c = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ ist (Nr. 56).

55. Von einem Centrum oder Pol O aus ziehe man Radiivectoren, von denen je zwei aufeinanderfolgende einen constanten

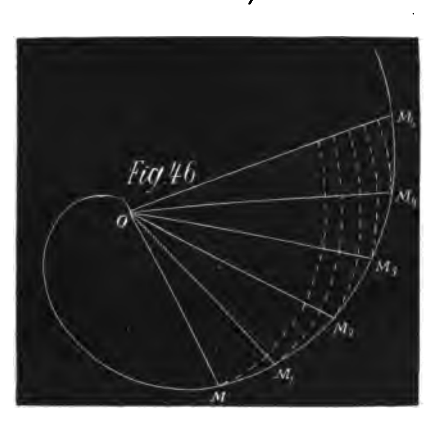
Winkel ω einschliessen, und deren Längen eine arithmetische Progression bilden

$$a, a + b, a + 2b, a + 3b, \ldots.$$

Die Endpunkte $M, M_1, M_2, M_3, \ldots.$ sind dann Punkte einer Curve, die man Spirale des ARCHIMEDES nennt, jener Curve, die von einem Punkte M beschrieben wird, der sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf dem Radius OM bewegt, während dieser um O ebenfalls mit constanter Geschwindigkeit in der Art rotiert, dass M die geradlinige Strecke b in derselben Zeit durchläuft, in welcher der Radius OM den Winkel ω beschreibt.

Nimmt man den Winkel ω hinreichend klein, so erhält man hinreichend nahe Punkte um die Curve mit derjenigen Annäherung ziehen zu können, die man für die Praxis nöthig hat.

Nach Verzeichnung der Spirale des ARCHIMEDES reduciert sich das Problem einen Winkel zu theilen, auf das der Theilung einer Geraden. Denn hat man zwei Radiivectoren gezogen, welche den Winkel einschliessen, den man in n gegebenen Geraden proportionale Theile theilen will, so braucht man nur die Differenz der Radienvectoren in n denselben Grössen proportionale Theile zu theilen; die Entfernungen des Punktes O und der n—1 Theilpunkte sind die Längen der n—1 Radiivectoren, die man zwischen die beiden gegebenen einschieben muss, um die Theilung des Winkels zu erhalten. Die Fig. 46 zeigt die Theilung des Winkels MOM_5 in fünf gleiche Theile.*)



56. Sollen mehrere Segmente AB, AC, ..., BC, ... einer Geraden u mit einem constanten Verhältniss b : c multipliciert werden, so handelt es sich darum, eine Punktreihe A′, B′, C′, ... einer andern Geraden u′ zu finden, so dass die Gleichungen

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \ldots = \frac{B'C'}{BC} = \ldots = \frac{b}{c}$$

erfüllt sind.

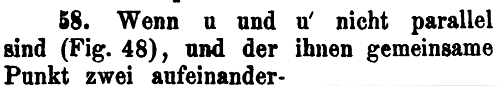
Die Geraden u, u′ heissen ähnliche Punktreihen, und die Punkte A und A′, B und B′, ..., und ebenso die Segmente AB und A′B′, ... heissen entsprechend.

---

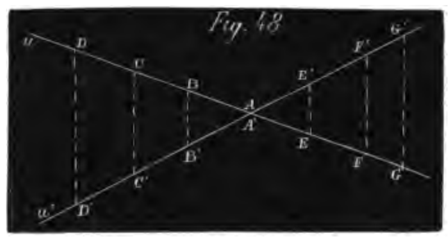
*) PAPPOS, *Collectiones mathematicae.* Lib. IV., Prop. XX u. XXXV.

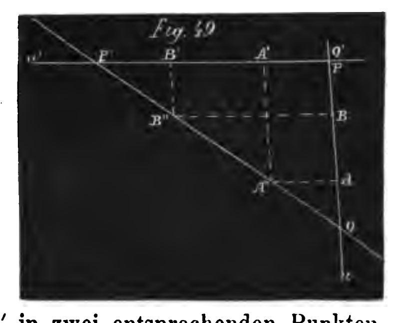


57. Sind die Geraden u, u′ parallel (Fig. 47), so gehen die Verbindungsgeraden AA′, BB′, CC′, ... sämmtlich durch einen festen Punkt O (das Projectionscentrum). Macht man z. B. AB = c, A′B′ = b, so geben die AA′, BB′ in ihrem Durchschnitt den Punkt O, und jeder durch Punkt O gezogene Radiusvector schneidet dann u und u′ in zwei entsprechenden Punkten.



58. Wenn u und u′ nicht parallel sind (Fig. 48), und der ihnen gemeinsame Punkt zwei aufeinanderfallende entsprechende Punkte A, A′ repräsentiert, so sind die Geraden BB′, CC′, ... sämmtlich unter einander parallel. Die gemeinsame Richtung dieser Parallelen findet man, wenn man z. B. AB = c, A′B′ = b annimmt; dann schneidet jeder zu BB′ parallele Strahl die u, u′ in zwei entsprechenden Punkten.





59. Wenn endlich (Fig. 49) u, u′ nicht parallel sind, und ihr gemeinsamer Durchschnittspunkt zwei nicht entsprechende Punkte P, Q′ darstellt, so sind die Geraden AA′, BB′, CC′, ... Tangenten ein und derselben Parabel. Nimmt man z. B. PQ = c, P′Q′ = b, so ist die Parabel dadurch bestimmt, dass sie u in Q und u′ in P′ berühren muss. Jede Tangente dieser Parabel schneidet u′ in zwei entsprechenden Punkten.

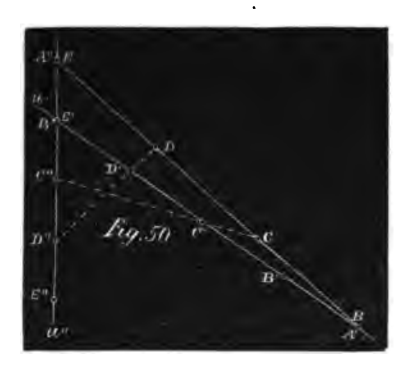
Um entsprechende Punktepaare zu erhalten, wie A und A′, B und B′, ... braucht man nur von den verschiedenen Punkten A″, B″, ... der Geraden P′Q die Geraden A″A, B″B, ... parallel u′, und die Geraden A″A′, B″B′, ... parallel zu u zu ziehen. Denn man hat offenbar

$$\frac{A'B'}{A''B''} = \frac{P'Q'}{P'Q}, \quad \frac{AB}{A''B''} = \frac{PQ}{P'Q},$$

und folglich

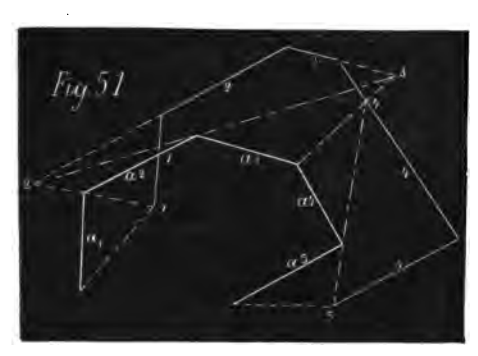
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{P'Q'}{PQ} = \frac{b}{c}.$$

Will man vermeiden Parallele zu ziehen*), so genügt es (Fig. 50) zwei Tangenten der Parabel als gegeben zu betrachten, d. h. zwei Gerade u′, u″ auf denen zwei ähnliche Punktreihen (sie dürfen auch gleich sein) A′B′C′D′E′, . . ., A″B″C″D″E″ . . . in der Art verzeichnet sind, dass der gemeinsame Durchschnittspunkt der Geraden zwei nicht entsprechende Punkte E′, B″ repräsentiert, und dass das Segment B′E′ von u′ (das zwischen der Parabel und u″ enthalten ist) gleich dem Nenner c des gegebenen Verhältnisses ist. Will man dann die Segmente von u′ mit dem Verhältniss b : c multiplicieren, so muss man die Länge BE = b zwischen u′ und u″ in der Art zwischenlegen, dass dieselbe zwei entsprechende Punkte A′, A″ verbindet: die Geraden C′C″, D′D″, . . ., welche entsprechende Punkte von u′, u″ verbinden, bestimmen auf BE dann die gesuchten Segmente



$$BC : CD : DE : BE =$$
$$B'C' : C'D' : D'E' : B'E'.$$

Handelte es sich z. B. um die Theilung einer gegebenen Länge BE in n gleiche Theile, so würde man durch B die Gerade u′ ziehen, und auf derselben n + 1 einander gleiche Segmente A′B′ = B′C′ = C′D′ = D′E′ abtragen; nachdem man dann E mit E′ verbunden, würde man auf der Verbindungslinie u″ ebenso n + 1 Segmente EE′ oder A″B″ = B″C″ = C″D″ = D″E″ auftragen. Die n + 1 Geraden C′C″, D′D″, ... treffen dann BE in den gewünschten Theilpunkten C, D, ...

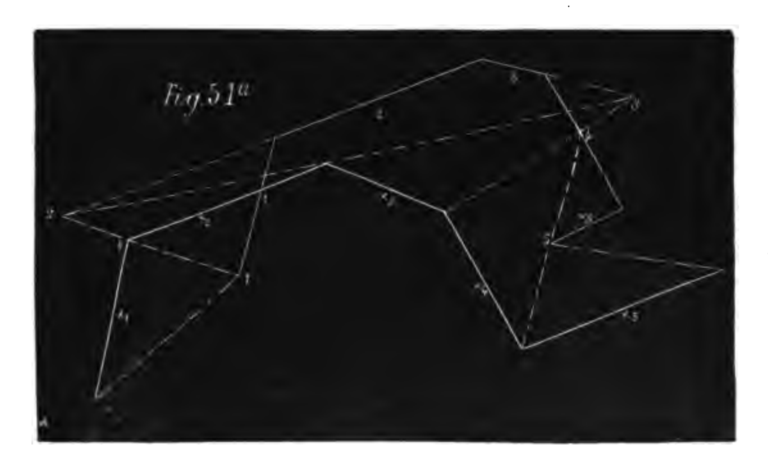


60. Aufgabe. — Es seien (Fig. 51) a_1, a_2, . . ., a_n n nach Grösse, Richtung und Sinn gegebene Segmente; man soll dieselben der Reihe nach mit den Verhältnissen $b_1 : c_1$, $b_2 : c_2$, . . ., $b_n : c_n$ multiplicieren.

*) Cousinery, *Le calcul par le trait* (Paris, 1840), p. 20. In Betreff einer anderen Methode dieses Problem zu lösen sehe man Sacheri, *Sul tracciamento delle punteggiate projettive simili* (Atti dell' Accademia di Torino, novembre 1873).

Man construiere einen polygonalen Linienzug P_a, dessen Seiten der Reihe nach den gegebenen Segmenten $a_1, a_2, \ldots$ äquipollent sind, und nenne die aufeinanderfolgenden Scheitel 1, 12, 23, ..., $n-1 \,.\, n$, n, indem man mit dem Anfangspunkte der ersten Seite a_1, anfängt und mit dem Endpunkte der letzten Seite a_n schliesst.

Dann beschreibe man zwei andere Linienzüge P_c und P_{ac}. Der erste werde gebildet von den n Geraden 1, 2, ..., n, die der Reihe nach den Seiten von P_a parallel sind und von denselben in einer constanten Richtung*) die Abstände $c_1, c_2, \ldots, c_n$ haben; der zweite habe seine Scheitel 1, 2, ..., n der Reihe nach auf den Seiten von P_c und seine Seiten 1, 12, 23, ..., $n-1 \,.\, n$, n**) mögen bezüglich durch die gleichnamigen Scheitel von P_a gehen. Die Gesammtheit der drei Linienzüge heisse die erste Figur.



Jetzt construiere man eine zweite Figur, die in analoger Weise aus drei Linienzügen P_x, P_b, P_{xb} besteht, nach folgenden Bedingungen (Fig. 51[a]):

1. Die Seiten von P_x seien der Reihe nach den Seiten von P_a parallel; die Seiten von P_b denen von P_c (und also auch denen von P_a und P_x); die Seiten von P_{xb} denen von P_{ac};

---

*) Sie kann beliebig angenommen werden, darf aber mit der Richtung keines der Segmente a zusammenfallen. Je nachdem c_r positiv oder negativ ist, wird man die Gerade r rechts oder links von demjenigen ziehen, der a^r in dem diesem Segmente zugehörigen Sinne durchläuft.

**) Die Seite 1 ist die, welche dem Scheitel 1 vorhergeht; die Seite 12 verbindet die Scheitel 1, 2; ....; die Seite n folgt auf den Scheitel n. Um dieses Polygon zu construieren, kann man die Seite 1 beliebig annehmen, wenn sie nur durch den Scheitel 1 von P_a geht.

2. Die Seiten $1, 2, \ldots, n$ von P_b mögen von den gleichnamigen Seiten von P_x in der oben beliebig festgesetzten Richtung die Abstände $b_1, b_2, \ldots, b_n$ besitzen*);

3. Die Scheitel $1, 2, \ldots, n$ von P_{xb} fallen der Reihe nach in die gleichnamigen Seiten von P_b und die Seiten $1, 12, 23, \ldots, n-1 . n, n$ von P_{xb} gehen der Reihe nach durch die gleichnamigen Scheitel von P_x.

Um die zweite Figur zu construieren kann man beispielsweise in folgender Art vorgehen. Man wähle den Scheitel 1 von P_x beliebig und ziehe durch denselben zwei Gerade, die bezüglich der Seite a_1 von P_a und der Seite 1 von P_{ac} parallel sind: diese bestimmen die Lage der Seite 1 von P_x und der Seite 1 von P_{xb}. Zieht man nun im Abstande b_1 von der Seite 1 von P_x eine Parallele zu dieser Seite, so ist diese die erste Seite von P_b, und der Punkt, in welchem sie die Seite 1 von P_{xb} trifft, ist der Scheitel 1 von P_{xb}. Von diesem Punkte ziehe man (parallel zur Seite 12 von P_{ac}) die Seite 12 von P_{xb}, dann hat man im Durchschnittspunkte mit der Seite 1 von P_x den Scheitel 12 von P_x. Von hier aus ziehe man die Seite 2 desselben Polygons P_x in der Richtung des Segmentes a_2, und nachdem man in derselben Richtung, aber im Abstande b_2, die Seite 2 von P_b gezogen, wird der Durchschnittspunkt derselben mit der Seite 12 von P_{xb} den Scheitel 2 von P_{xb} liefern. Und so weiter.

Das Polygon P_x, dessen Seiten wir $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nennen wollen, liefert das gesuchte Resultat der verlangten Multiplication. Denn das Dreieck, welches x_r zur Grundlinie und den Scheitel r von P_{xb} zur gegenüberliegenden Ecke hat, ist wegen des Parallelismus der Seiten dem Dreieck der ersten Figur ähnlich, dessen Grundlinie a_r ist und der gegenüberliegende Eckpunkt der Scheitel r von P_{ac}. Die Dimensionen dieser Dreiecke in der constanten Richtung sind b_r, c_r, folglich ist

$$x_r : a_r = b_r : c_r$$

folglich

$$x_r = a_r \cdot \frac{b_r}{c_r}.$$

61. In Betreff des Sinnes des Segmentes x_r bemerken wir, dass die beiden Dreiecke ähnlich gelegen sind, sobald c_r, b_r denselben Sinn haben, d. h., dass ihre beiden Scheitel r beide rechts oder beide links von der respectiven gegenüberliegenden Grundlinie (a_r oder x_r) liegen; sind dagegen c_r, b_r von entgegengesetztem Sinne, so haben die beiden Dreiecke entgegengesetzte

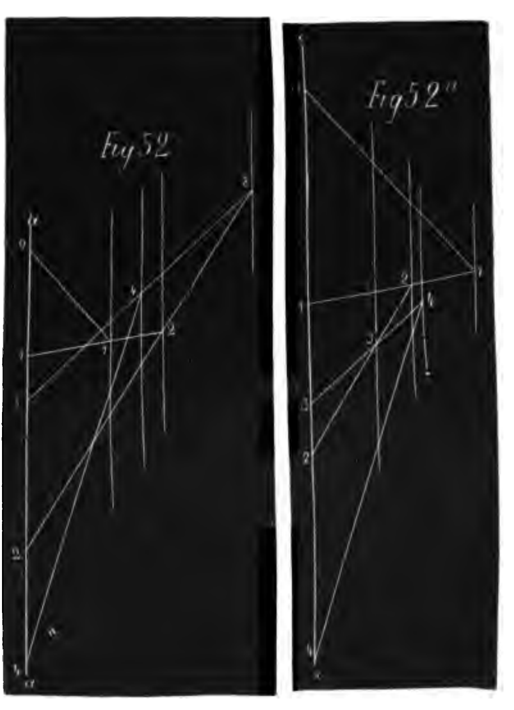
*) Auch hier wird man, jenachdem b_r positiv oder negativ ist, die Seite r rechts oder links von dem verzeichnen, welcher x_r in dem diesem Segmente eigenthümlichen Sinne durchläuft.

Lage. Folglich haben die Segmente a_r, x_r im ersten Falle gleichen Sinn, im zweiten entgegengesetzten.

Daraus folgt, dass die Segmente x in ihrer Reihenfolge mit Rücksicht auf ihren Sinn geordnet sind, d. h. in der Art, wie es von der geometrischen Addition gefordert wird. Folglich wird ihre Resultante, d. h. die Resultante der Segmente $a_r \cdot \frac{b_r}{c_r}$ nach Grösse, Richtung und Sinn durch diejenige Gerade gegeben, welche den polygonalen Linienzug P_x schliesst (das ist die Gerade, welche von dem Anfangspunkte von x_1 nach dem Endpunkte von x_n geht).

62. Specielle Fälle. — Die Segmente a seien sämmtlich parallel (Fig. 52); dann reduciert sich jeder der beiden Linienzüge P_a, P_x auf eine gerade Punktreihe, und jeder der Linienzüge P_c, P_b geht in ein Büschel paralleler Strahlen über. Das heisst, die Construction reduciert sich auf folgende:

Man trage die Segmente $01 = a_1$, $12 = a_2$, $23 = a_3$, ... der Reihe nach aufeinanderfolgend auf einer Geraden a auf; parallel zu derselben und in den Abständen $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ (in beliebiger constanter Richtung, jedoch von der von a verschieden gemessen) ziehe man ebensoviele Gerade 1, 2, ..., n, die wir als Strahlen eines Büschels ansehen, dessen Mittelpunkt in unendlicher Entfernung liegt; und



nun zeichne man einen polygonalen Linienzug, dessen Scheitel 1, 2, ..., n in die gleichnamigen Parallelstrahlen fallen und dessen Seiten 01, 12, 23, ..., n—1 . n, n durch die correspondierenden Punkte 0, 1, 2, ..., n—1, n der Punktreihe a gehen (d. h., durch die Punkte, welche die Segmente $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ begrenzen).

Nun construiere man die zweite Figur, indem man ein Büschel von Strahlen 1, 2, ..., n zieht, die parallel zu a von einer Geraden

x (die ebenfalls zu a parallel ist) der Reihe nach die Abstände $b_1, b_2, \ldots, b_n$ haben, und dann einen Linienzug zeichnet, dessen Seiten der Reihe nach den Seiten des ersten Polygons parallel sind, und dessen Scheitel auf die Strahlen des zweiten Büschels fallen. Die Segmente 01, 12, 23, ... von x, welche zwischen den aufeinanderfolgenden Seiten dieses neuen Polygones eingeschlossen sind, sind dann der Reihe nach

$$x_1 = a_1 \cdot \frac{b_1}{c_1},\ x_2 = a_2 \cdot \frac{b_2}{c_2},\ x_3 = a_3 \cdot \frac{b_3}{c_3}, \ldots,$$

und das Segment, das zwischen der Seite $r-1 \cdot r$ und der Seite $s \cdot s+1$ liegt, ist gleich

$$\sum_{i=r}^{i=s} x_i = \sum_{i=r}^{i=s} a_i \cdot \frac{b_i}{c_i} \ldots *)$$

In dem hier betrachteten Falle beweist man aus den in Bezug auf den Sinn des Segmentes x_r gemachten Bemerkungen leicht, dass zwei Segmente x_r, x_s gleichen oder entgegengesetzten Sinn besitzen, jenachdem unter den drei Paaren $a_r\, a_s$, $b_r\, b_s$, $c_r\, c_s$ eine gerade (Null oder Zwei) oder eine ungerade Zahl (Eins oder Drei) sich befindet, welche aus Segmenten von entgegengesetztem Sinne gebildet sind. Das ist in Uebereinstimmung mit der Zeichenregel der algebraischen Multiplication.

63. Wenn ausser, dass sämmtliche a parallel sind, noch sämmtliche c einander gleich wären, so würde das erste Büschel sich auf eine einzige Gerade reducieren, und folglich würden sämmtliche Scheitel des ersten Linienzuges in einen einzigen Punkt dieser Geraden zusammenfallen; d. h., das erste Polygon degeneriert in ein Strahlenbüschel, das von einem Punkte O ausgeht, der im Abstande c von der Geraden a liegt.



In diesem Falle lässt sich die Aufgabe, wie folgt, aussprechen:

Die gegebenen Producte

$$a_1 \cdot b_1,\ a_2 \cdot b_2, \ldots, a_n \cdot b_n$$

auf die constante Basis c zu reducieren, indem man die ihnen proportionalen Segmente

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

bestimmt.

Die Lösung würde dann folgende sein (Fig. 53): Man zeichne die gerade Punktreihe a, deren aufeinanderfolgende Segmente

---

*) JAEGER, *Das graphische Rechnen* (Speyer, 1867), S. 75.



01 = a_1, 12 = a_2, ..., n — 1 . n = a_n seien, und projiciere die Punkte 0, 1, 2, ..., n—1, n dieser Punktreihe vermittelst Strahlen, welche sämmtlich von einem Punkte O, der in der Entfernung c von der Geraden a liegt, ausgehen; der Abstand kann senkrecht oder beliebig schief sein. Dann construiere man ein Büschel von Strahlen 1, 2, ..., n, die parallel zu a sind und in der Richtung von c von einer Geraden x, die ebenfalls parallel zu a ist, die Abstände b_1, b_2, ..., b_n haben. Endlich zeichne man ein Polygon, dessen Scheitel der Reihe nach auf den ebengenannten Parallelstrahlen 1, 2, 3, ..., n liegen, und dessen Seiten 01, 12, 23, ..., n—1 . n, n der Reihe nach den Strahlen O0, O1, O2, ..., On—1, On des Büschels O parallel sind. Die Segmente 01, 12, 23, ..., welche die Seiten dieses Polygons auf der Geraden x bestimmen, sind die gesuchten Segmente x_1, x_2, x_3, ... *)

64. Wenn nicht die c, sondern die b sämmtlich einander gleich wären, ausser dass die a alle unter sich parallel sind, so liesse sich die Aufgabe so aussprechen:

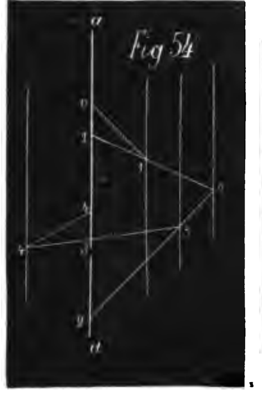
Es sind die Verhältnisse

$$\frac{a_1}{c_1}, \frac{a_2}{c_2}, \ldots, \frac{a_n}{c_n}$$

gegeben, man soll die ihnen proportionalen Segmente

$x_1, x_2, \ldots, x_n$

bestimmen, wenn b das constante Segment ist, welches durch Multiplication von x mit dem entsprechenden Verhältnisse von $\frac{c}{a}$ entsteht.





Nachdem die Punktreihe a (Fig. 54) mit den Segmenten 01 = a_1, 12 = a_2, ..., n—1 . n = a_n und das Büschel von Strahlen 1, 2, 3, ..., n parallel zu a mit den in constan-

*) Culmann, *a. a. O.*, S. 22 u. 23.

ter Richtung gemessenen respectiven Abständen $c_1, c_2, \ldots, c_n$ construiert sind, zeichne man einen polygonalen Linienzug, dessen Scheitel 1, 2, ..., n der Reihe nach auf diese Strahlen fallen, und dessen Seiten 1, 12, 23, ..., $n-1 . n$, n durch die gleichnamigen Punkte der Punkreihe a gehen. Dann construiere man ein zweites Büschel, dessen Strahlen der Reihe nach den Seiten des polygonalen Linienzuges parallel sind und sämmtlich von einem beliebig gegebenen Punkte O ausgehen; endlich schneide man das zweite Büschel durch eine Gerade x, die parallel zu a ist und von O den Abstand b in der Richtung der Geraden c hat. Die Segmente 01, 12, 23, ..., welche man so auf x erhält, sind die verlangten.

Auf diese Aufgabe reduciert sich dem Wesen nach die Transformation mehrerer gegebener Brüche

$$\frac{a_1}{c_1}, \frac{a_2}{c_2}, \ldots, \frac{a_n}{c_n}$$

in andere gleichwerthige

$$\frac{x_1}{b}, \frac{x_2}{b}, \ldots, \frac{x_n}{b}$$

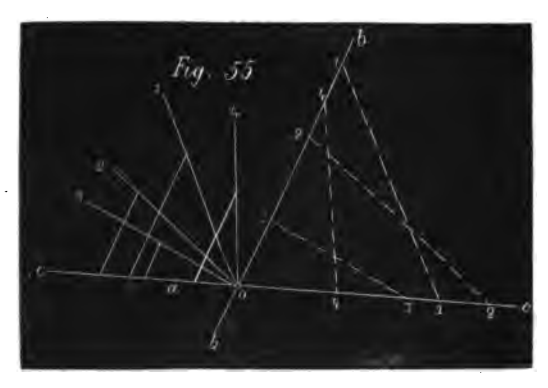
die sämmtlich denselben Nenner b besitzen.

65. Aufgabe. — Eine Gerade a mit den Verhältnissen

$$\frac{b_1}{c_1}, \frac{b_2}{c_2}, \ldots, \frac{b_n}{c_n}$$

zu multiplicieren.

Man ziehe (Fig. 55) zwei Gerade oder Axen bb, cc, die sich in O unter einem beliebigen Winkel schneiden. Von O ausgehend



trage man auf der ersten Axe die Segmente b und auf der zweiten die Segmente c ab, wodurch entstehen mögen:

auf der ersten Axe: $O1 = b_1, O2 = b_2, \ldots, O_n = b_n$;

und auf der zweiten: $O1 = c_1, O2 = c_2, \ldots, O_n = c_n$.

Man verbinde die homologen Punkte beider Axen, d. h. 1 mit 1, 2 mit 2 u. s. w., und ziehe durch O parallel mit den Verbindungs-

linien ebensoviele Gerade $l_1, l_2, \ldots, l_n$, die in der Figur nur durch die numerischen Indices bezeichnet sind.

Zwei Segmente b_r, c_r mit demselben Index bilden im Verein mit der Verbindungslinie rr ihrer Endpunkte ein Dreieck. Nun construiere man zu jedem dieser Dreiecke ein ähnliches, in welchem die beiden c_r und rr entsprechenden Seiten von O ausgehen und bezüglich in cc, l_r liegen; die dritte Seite, welche b_r entspricht und parallel zu bb läuft, heisse a_r. Um die Bestimmung des Dreiecks zu vollenden braucht man nur eine Seite festzulegen, die, welche auf cc liegt; es sei dieselbe gleich a im ersten Dreiecke, gleich a_1 im zweiten, gleich a_2 im dritten, ..., gleich a_{n-1} im letzten. Dann behaupte ich, dass a_n, d. h. diejenige Seite des letzten Dreiecks, welche parallel zu bb liegt, das Resultat der Multiplication ist, welche man ausführen sollte.

Denn vergleicht man das r-te Dreieck der zweiten Reihe, dessen zu cc, bb parallele Seiten a_{r-1}, a_r sind, mit dem ähnlichen Dreiecke der ersten Reihe, dessen correspondierende Seiten c_r, b_r heissen, so erhält man:

$$\frac{a_r}{a_{r-1}} = \frac{b_r}{c_r},$$

und also

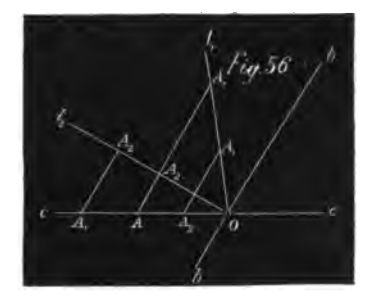
$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{c_1}, \ \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{c_2}, \ \frac{a_3}{a_2} = \frac{b_3}{c_3}, \ldots, \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{b_n}{c_n}.$$

Multipliciert man diese Gleichungen miteinander, so entsteht:

$$a_n = a \cdot \frac{b_1}{c_1} \cdot \frac{b_2}{c_2} \cdot \frac{b_3}{c_3} \cdots \frac{b_n}{c_n},$$

was zu beweisen war.

66. Wir wollen jetzt beweisen, dass das Resultat sich nicht ändert, wenn man zwei Factoren unter einander vertauscht, z. B. $\frac{b_1}{c_1}$, $\frac{b_2}{c_2}$. Nimmt man diese Factoren in der Reihenfolge $\frac{b_1}{c_1}$, $\frac{b_2}{c_2}$, so sind die Constructionen folgende (Fig. 56): Auf cc nehme man OA = a; von A ziehe man zu bb die Parallele, bis sie l_1 in A_1 trifft; das Segment $AA_1 = a_1$ trage man auf cc auf, d. h. man mache $OA_1 = a_1$, und von diesem neuen Punkte A_1 aus führe man die Parallele zu bb, bis sie l_2 in A_2 trifft; das so erhaltene Segment A_1A_2 ist dann a_2.



Nimmt man dagegen die Factoren in der Ordnung $\frac{b_2}{c_2}$, $\frac{b_1}{c_1}$, so muss man, wie folgt, vorgehen:

Nachdem man $OA = a$ gemacht hat wie vorher und durch A die Parallele zu bb gezogen, lasse man dieselbe auf l_2 im Punkte A_2 enden und nenne das so erhaltene Segment a'; dann mache man auf cc das Segment $OA_2 = a'$ und ziehe dann A_2A_1 parallel zu bb bis zu der Linie l_1; die Gerade A_2A_1 heisse a''.

Die zwischen l_1 und cc enthaltenen ähnlichen Dreiecke OA_1A_2, OA_1A geben dann die Beziehungen

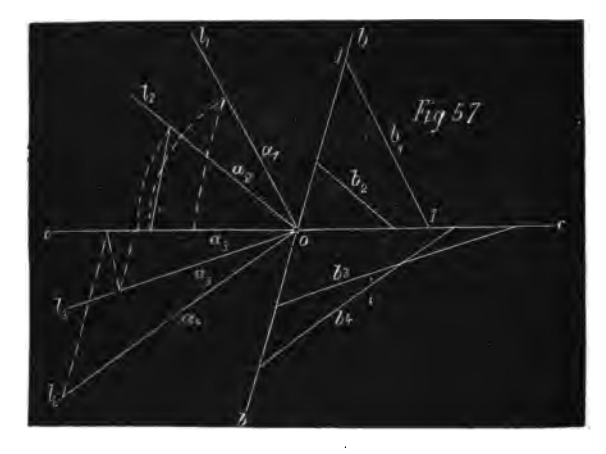
$$\frac{A_2A_1}{AA_1} = \frac{OA_2}{OA}, \text{ d. h., } \frac{a''}{a_1} = \frac{a'}{a};$$

die ebenfalls ähnlichen zwischen l_2 und cc gelegenen Dreiecke OA_1A_2, OAA_2 geben entsprechend

$$\frac{A_1A_2}{OA_1} = \frac{AA_2}{OA}, \text{ oder } \frac{a_2}{a_1} = \frac{a'}{a}.$$

Folglich ist $a'' = a_2$, w. z. b. w.*)

67. Bei der Construction der Dreiecke erster Reihe könnte man, statt die Segmente b auf der Geraden bb aufzutragen, nachdem man (Fig. 57) auf cc die Seite $O1 = c_1$ gemacht hat, auf der



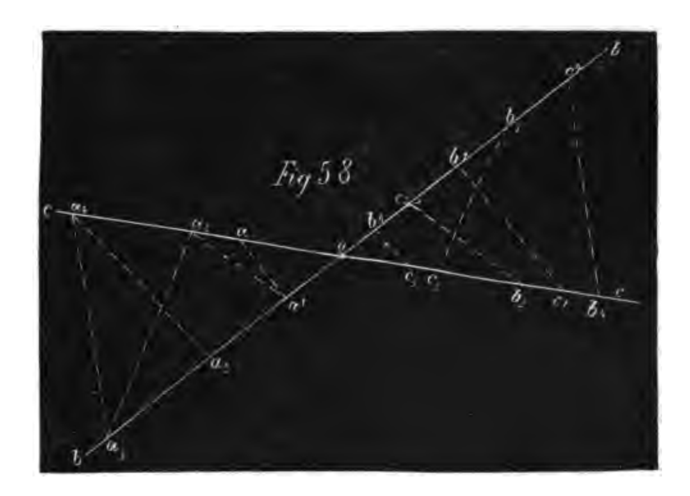
Geraden Ob einen Punkt 1 so annehmen, dass die Verbindungslinie 11 nach absoluter Länge gleich b_1 wäre. Nachdem dann durch O die l_1 parallel 11 gezogen, würde man, wie oben, das Dreieck der zweiten Reihe, das zu O11 ähnlich ist, construieren, indem man auf cc eine Seite gleich a annähme. Dann würde das Product $a_1 = a \cdot \frac{b_1}{c_1}$ nicht durch die zu bb parallele Seite, sondern durch die auf l_1 liegende Seite gegeben werden; und so fort für die

*) Eggers, *Grundzüge einer graphischen Arithmetik* (Schaffhausen, 1865), S. 12. — Jaeger, *a. a. O.*, S. 11.

übrigen Dreiecke. Bei dieser Construction wird den Zeichen der Segmente b keine Rechnung getragen, weil sie in verschiedener Richtung aufgetragen werden; deshalb ist es bei Uebertragung z. B. des Segmentes a_1 auf cc, um zu der Construction des nächstfolgenden Dreiecks überzugehen, nöthig demselben das Zeichen von a zu geben oder das entgegengesetzte, jenachdem b_1 und c_1 gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben.

Bei dieser Art vorzugehen werden die Segmente $a_1, a_2, \ldots, a_n$, die man bezüglich auf $l_1, l_2, \ldots l_n$ erhalten hat (den Parallelen zu $b_1, b_2, \ldots, b_n$), auf cc mittelst Kreisbogen übertragen, deren gemeinsames Centrum O ist.

68. Eine dritte Art die vorgelegte Multiplication auszuführen besteht (Fig. 58) in Folgendem: Man trägt von dem gemeinsamen



Anfangspunkt O aus die Segmente $b_1, b_3, b_5, \ldots, c_2, c_4, \ldots$ auf einer der beiden Axen (bb), und die Segmente $b_2, b_4, \ldots, c_1, c_3, c_5, \ldots$ auf der andern Axe (cc) ab, und verbindet immer die Endpunkte 11, 22, 33 ... der Segmente b, c von gleichem Index mit einander. Dann ist nur nöthig zwischen den beiden Axen eine gebrochene Linie einzubeschreiben, deren aufeinanderfolgende Seiten bezüglich zu den Verbindungslinien 11, 22, 33, ... parallel sind, und deren Scheitel abwechselnd auf cc und bb liegen. Nimmt man den ersten Scheitel so an, dass er der Endpunkt des Segmentes von cc ist, das gleich a ist und den Anfangspunkt O hat, so sind der zweite Scheitel, der dritte, der vierte, ... analog die Endpunkte der Segmente

$$a_1 = a \cdot \frac{b_1}{c_1},\ a_2 = a_1 \cdot \frac{b_2}{c_2},\ a_3 = a_2 \cdot \frac{b_3}{c_3}, \ldots,$$

wo der gemeinsame Scheitel O ist*).

Dies ist evident, sobald man beachtet, dass die Dreiecke der zweiten Reihe bei dieser Construction sämmtlich eine Seite auf bb und eine andere auf cc besitzen, während die dritte diejenige Seite der gebrochenen Linie ist, welche der dritten Seite des ähnlichen Dreiecks der ersten Seite parallel ist.

69. Wenn man nicht nöthig hat, den Zeichen der Segmente a, b, c Rechnung zu tragen, d. h. wenn man diese sämmtlich als positiv betrachtet, so kann man auch die Construction in der Art anordnen, dass sowohl die Dreiecke der ersten Reihe als auch die Dreiecke der zweiten Reihe aufeinanderfolgend (gleichsam wie ein Fächer) um einen gemeinsamen Scheitel angeordnet sind (Fig. 59).


Fig 59

Durch O ziehe man $n+1$ Gerade oder Radienvectoren, die beliebige Winkel mit einander einschliessen; zwischen dem ersten und zweiten Radiusvector construiere man das erste Dreieck der ersten Reihe und das erste der zweiten; zwischen dem zweiten und dritten Strahl die zweiten Dreiecke der beiden Reihen; zwischen dem dritten und vierten Strahl die dritten Dreiecke, u. s. w., in der Art, dass zwei Dreiecke der zweiten Reihe, die sich unmittelbar folgen, stets eine Seite gemein haben. Das heisst, auf dem ersten Strahl nehme man mit dem Anfangspunkte O zwei Segmente bezüglich gleich a und c_1; auf dem zweiten Strahle von demselben Anfang aus das Segment b_1: man verbinde die Endpunkte von b_1, c_1 und zu der Verbindungslinie ziehe man durch den Endpunkt von a die Parallele, welche auf den zweiten Radiusvector ein Segment $a_1 = a \cdot \frac{b_1}{c_1}$ bestimmt. Nimmt man jetzt in derselben Art auf dem zweiten Radius das Segment c_2 und auf dem dritten Radius das Segment b_2, so bestimmt man auf dem letztern ein Segment $a_2 = a_1 \cdot \frac{b_2}{c_2} = a \cdot \frac{b_1}{c_1} \cdot \frac{b_2}{c_2}$.

---

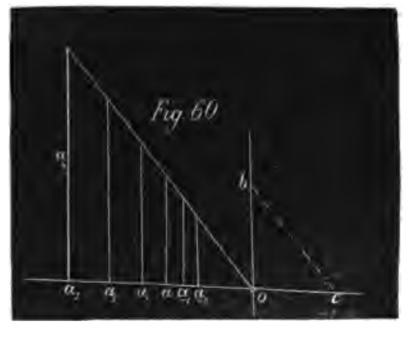
*) In den Fig. 58, 59 u. ff. trägt jedes der Segmente, welche den gemeinsamen Scheitel O haben, an seinem Endpunkt den Buchstaben a, b oder c, der das Mass desselben angiebt.

Setzt man diese Constructionsart fort, so gelangt man zuletzt auf dem (n + 1)-ten Radiusvector zu einem Segment mit dem Anfangspunkte O, dessen Werth gleich ist

$$a_n = a \cdot \frac{b_1}{c_1} \cdot \frac{b_2}{c_2} \cdot \ldots \cdot \frac{b_n}{c_n}.$$

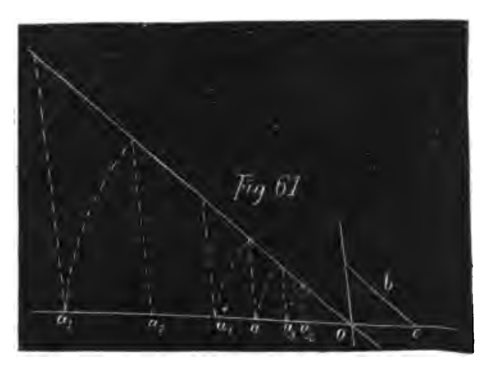
IV. POTENZEN.

70. Setzt man in der letzten Aufgabe die b sämmtlich einander gleich und ebenso sämmtliche c, so ist das construierte Segment a_n das Resultat der Multiplication von a mit der n-ten Potenz des Verhältnisses $\frac{b}{c}$.



In diesem Falle fallen, sowohl bei der ersten Constructionsart in Nr. 65 (Fig. 60) als bei der zweiten in Nr. 67 (Fig. 61) die Dreiecke der ersten Reihe sämmtlich in ein einziges zusammen, von dem zwei Seiten die gegebenen Segmente b, c sind. Die n Dreiecke der zweiten Reihe sind sämmtlich unter einander und dem einzigen Dreiecke der ersten Reihe ähnlich. Ihre auf OC liegenden Seiten sind der Reihe nach a, a_1, a_2, ... a_n—1 und die zu b parallelen Seiten sind a_1, a_2, a_3, ..., a_n, wobei

$$a_1 = a \cdot \frac{b}{c}, \; a_2 = a \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^2, \; a_3 = a \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^3, \; \ldots, \; a_n = a \left(\frac{b}{c}\right)^n.$$



Diese Reihe ähnlicher Dreiecke kann man auch im entgegengesetzten Sinne fortsetzen, so dass man die Producte von a mit den negativen Potenzen von $\frac{b}{c}$ erhält. Construiert man nämlich das Dreieck, dessen zu b parallele Seite gleich a ist, so ist die Seite auf OC

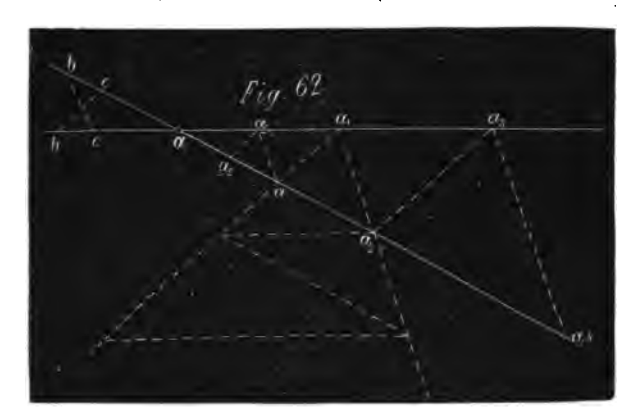
$$a_{-1} = a : \frac{b}{c} = a \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^{-1};$$

construiert man dann das Dreieck, dessen zu b parallele Seite gleich a_{-1} ist, so ist die Seite auf Oc

$$a_{-2} = a \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^{-2},$$

und so fort.*)

71. Nach der dritten Art (Nr. 68) reducieren sich die Dreiecke der ersten Reihe auf zwei einander gleiche aber verschieden gelegene (Fig. 62); bei dem einen liegt die Seite c auf der ersten



Axe und die Seite b auf der zweiten; bei dem andern dagegen liegt die Seite b auf der ersten, die Seite c dagegen auf der zweiten Axe. Die Richtungen der dritten Seiten sind folglich antiparallel, und parallel zu ihnen laufen die Seiten der gebrochenen Linie, welche zwischen die beiden Axen einzuschreiben ist. Die Scheitel dieser gebrochenen Linie bestimmen auf der ersten Axe Segmente, die von O aus gerechnet die Werthe

$$a,\ a_2 = a \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^2,\ a_4 = a \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^4, \ldots .$$

besitzen, und auf der anderen Axe die Segmente

$$a_1 = a \cdot \frac{b}{c},\ a_3 = a \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^3,\ a_5 = a \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^5, \ldots *)$$

Auch die Seiten der gebrochenen Linie bilden eine geometrische Progression; nennt man die erste Seite a′, so ist die zweite

---

*) Eggers, *a. a. O.*, S. 15. — Jaeger, *a. a. O.*, S. 18—20.
**) Cousinery, *a. a. O.*, p. 24—25.

$a' \cdot \frac{b}{c}$, die dritte $a' \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^2$, die vierte $a' \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^3$, ... Daraus folgert man, dass das gegebene Segment, das mit $\left(\frac{b}{c}\right)^n$ multipliciert werden soll, statt auf der ersten Axe aufgetragen zu werden, so in den Winkel der Axen eingezeichnet werden kann, dass es die erste Seite der gebrochenen Linie bildet; die $(n+1)$-te Seite ist dann das Resultat der Multiplication.

Setzt man die gebrochene Linie im umgekehrten Sinne fort, so erhält man die Producte des gegebenen Segmentes (a oder a′) mit den negativen Potenzen

$$\left(\frac{b}{c}\right)^{-1}, \left(\frac{b}{c}\right)^{-2}, \left(\frac{b}{c}\right)^{-3}, \ldots\ldots$$

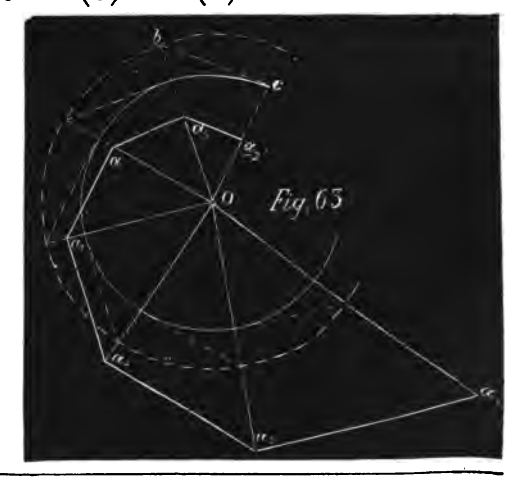
des gegebenen Verhältnisses.

Will man zwischen zwei aufeinanderfolgenden Seiten der gebrochenen Linie, z. B. zwischen den beiden ersten, welche a′ und $\frac{b}{c}$ sind, die Progression fortsetzen, so braucht man nur eine neue gebrochene Linie zwischen ihnen zu zeichnen, deren Seiten abwechselnd den Axen parallel sind; man erhält so eine der vorhergehenden analoge Figur.

Heisst das Segment der ersten Axe, das zwischen den ersten beiden Seiten der ersten gebrochenen Linie eingeschlossen ist, a″, so sind die Seiten der neuen gebrochenen Linie der Reihe nach

$$a'', a'' \cdot \frac{b}{c}, a'' \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^2, a'' \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^3, \ldots *)$$

72. Benutzen wir endlich die vierte Art der Construction (Nr. 69), und nehmen noch den Winkel zweier aufeinanderfolgender Radiivectoren als constant an (Fig. 63), so werden sämmtliche Dreiecke der ersten Reihe einander congruent und ihre (von O verschiedenen) Scheitel liegen auf zwei concentrischen Kreisen bezüglich vom Radius b und c. Die Dreiecke der zweiten



*) Cousinery, *a. a. O.*, p. 24. — Culmann, *a. a. O.*, S. 13.

Reihe sind alle einander ähnlich, weil jedes demjenigen ähnlich ist, das ihm in der ersten Reihe entspricht; ihre (von O verschiedenen) Scheitel und ihre (O gegenüberliegenden) Seiten sind die Scheitel und Seiten eines polygonalen spiralförmigen Linienzuges. Die Radiivectoren dieser Spirale, d. h. die Geraden, welche man von O nach den Scheiteln zieht, sind die Glieder

$$a, a_1 = a \cdot \frac{b}{c}, \; a_2 = a \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^2, \ldots$$

einer geometrischen Progression und können auch in entgegengesetztem Sinne fortgesetzt werden, so dass sie die Producte von a mit den negativen Potenzen von $\frac{b}{c}$ geben:

$$a \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^{-1}, a \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^{-2}, a \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^{-3}, \ldots$$

Auch die Seiten des polygonalen Linienzuges bilden eine geometrische Progression mit dem Quotienten $\frac{b}{c}$ *).

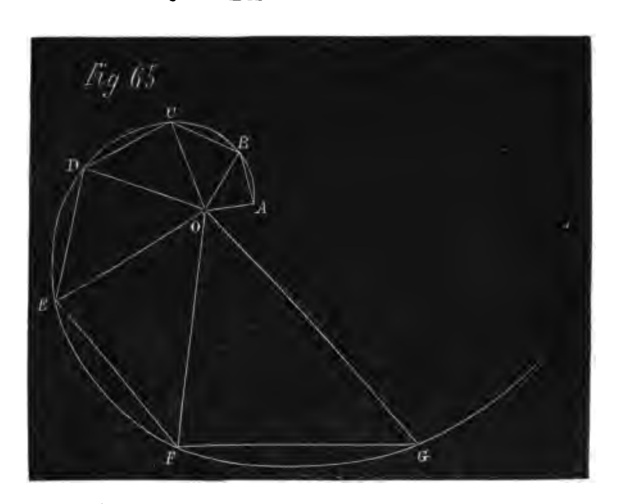
Ist der constante Winkel der beiden aufeinanderfolgenden Radiivectoren mit vier Rechten in einem commensurabeln Verhältniss, das in den kleinsten Zahlen ausgedrückt zum Nenner p hat, so fällt der (p + 1)-te Radius mit dem ersten, der (p + 2)-te mit dem zweiten zusammen u.s.w. Wenn z. B. der gegebene constante Winkel ein rechter wäre**), so wären auch die Winkel, welche von zwei aufeinanderfolgenden Seiten des Spiralpolygons eingeschlossen werden, sämmtlich rechte (Fig. 64).



*) JAEGER, *a. a. O.*, S. 20.
**) REULEAUX, *Der Constructeur*, 3. Aufl. (Braunschweig, 1869), S. 84. — K. VON OTT, *Grundzüge des graphischen Rechnens und der graphischen Statik* (Prag, 1871), S. 10.

V. WURZELAUSZIEHUNG.

73. Man betrachte (Fig. 65) das Spiralpolygon ABCDEFG..., dessen Radiivectoren OA, OB, OC, OD,... die Producte eines constanten Segmentes OA mit der 0., 1., 2., 3.... Potenz eines gegebenen Verhältnisses $\frac{b}{c} = \frac{OB}{BA}$ darstellen, und dessen Seiten AB, BC,



CD,... am Pole O ein constanter Winkel gegenüberliegt (Nr. 72). Wie schon bemerkt wurde, sind alle Elementardreiecke, welche O zum Scheitel und eine Seite des Polygons zur Grundlinie haben, unter einander ähnlich; ähnlich sind auch die Figuren, welche man erhält, wenn man zwei, drei oder vier .... der genannten Dreiecke verbindet, da sie aus derselben Zahl von ähnlichen und ähnlich gelegenen Dreiecken zusammengesetzt sind. Es sind also die Winkel ABO, BCO, CDO,... sämmtlich einander gleich; ebenso die Winkel ACO, BDO, CEO,...; die Winkel ADO, BEO, CFO, ...; u. s. w. Im Allgemeinen sind alle Dreiecke vom Scheitel O ähnlich, deren Grundlinien Sehnen sind, welche dieselbe Zahl von Seiten des Polygons überspannen; diesen Sehnen liegen auch am Pole O gleiche Winkel gegenüber.

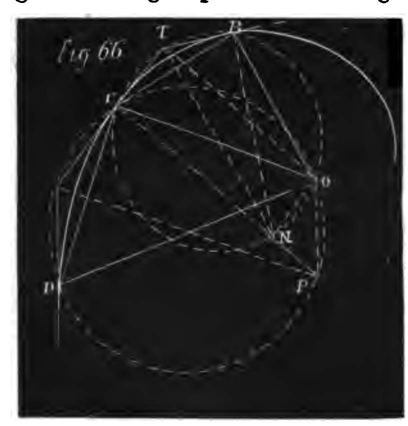
Diese Eigenschaften sind völlig von der Grösse des Winkels AOB, der bei der Construction des ersten Elementardreiecks beliebig gewählt ist, unabhängig; sie können also nicht aufhören giltig zu sein, wenn man diesen Winkel unendlich klein voraussetzt. In diesem Falle geht der polygonale Linienzug in eine Curve über. Aus der Aehnlichkeit der Elementardreiecke haben

wir schon die Gleichheit der Winkel an den Grundlinien OAB, OBC, ... hergeleitet; wird aber der Winkel am Punkte O unendlich klein, so wird die Gegenseite des Elementardreiecks zur Tangente der Curve; die erhaltene Curve hat also die Eigenschaft, dass ihre Tangenten (in demselben Sinne verlängert, z. B. in dem der wachsenden Radiivectoren) die Radienvectoren, welche vom Pole O nach den Berührungspunkten gezogen sind, unter gleichen Winkeln schneiden.*)

In Folge dieser Eigenschaft nennt man diese Curve die **gleichwinklige Spirale**.**)

74. Da die Figuren, welche von einer gleichen Zahl von aufeinanderfolgenden Elementardreiecken gebildet werden, unter sich ähnlich sind, so werden, wenn wir in der gleichwinkligen Spirale die Radienvectoren OA, OB, OC, ... so ziehen, dass die von je zwei aufeinanderfolgenden eingeschlossenen Winkel einander gleich sind, die Dreiecke OAB, OBC, OCD, ... unter einander ähnlich sein; folglich bilden die genannten Radienvectoren eine geometrische Progression, d. h. der in die Spirale eingeschriebene polygonale Linienzug ABCD... ist genau derselbe, den man nach der Regel der Nr. 72 erhalten würde, wenn man vom Elementardreieck AOB ausginge. Wenn man also beliebig das Dreieck AOB annimmt und den polygonalen Linienzug ABCD.... construiert, so sind sämmtliche Scheitel desselben Punkte ein und derselben gleichwinkligen Spirale mit dem Pole O.

Daraus folgt, dass der Pol und zwei Punkte der Curve die gleichwinklige Spirale vollständig bestimmen.



75. Zwei beliebige Punkte B, C der gleichwinkligen Spirale (Fig. 66), der Pol O, der Durchschnittspunkt T der Tangenten in jenen Punkten, und der Durchschnittspunkt N der betreffenden Normalen sind fünf Punkte desselben Kreises, für den NT ein Durchmesser ist. Hiervon kann man sich leicht überzeugen, indem man beachtet, 1. dass der Kreis mit dem Durchmesser NT durch die Punkte B, C geht, da die Winkel NBT, NCT rechte sind;

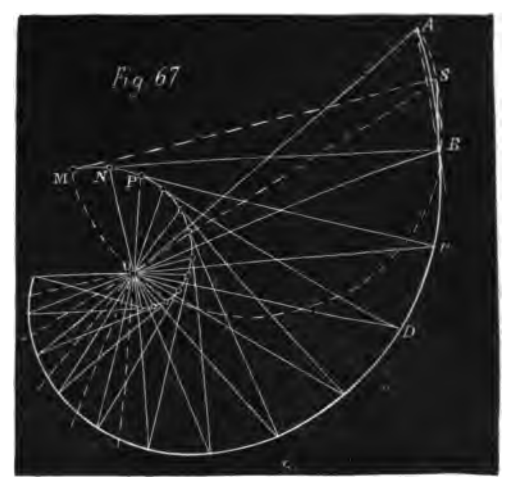
*) Cousinery, *a. a. O.*, p. 41, 42. — Culmann, *a. a. O.*, S. 14 u. ff.

**) Withworth, *The equiangular spiral, its chief properties proved geometrically* (Oxford, Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics, vol. 1, Cambridge, 1862), p. 5.

2. dass die Winkel OBT, OCT Supplementwinkel sind, da der Winkel, den die Tangente mit dem Radiusvector des Berührungspunktes bildet, constant ist, und folglich die vier Punkte OTBC demselben Kreise angehören. Daraus folgt, dass der Winkel NOT ein rechter ist.

76. Wir wollen jetzt die Punkte B, C hinreichend nahe annehmen, dass der zwischen ihnen enthaltene Spiralenbogen durch einen Kreisbogen ersetzt werden kann. Da dieser Bogen BT und CT in den Punkten B, C berühren muss, so liegt sein Mittelpunkt in N; die Tangenten BT, CT müssen gleich sein, und folglich wird die Sehne BC von der Geraden NT senkrecht halbiert; daraus folgt ausserdem noch, dass N, T die Halbierungspunkte der Bogen BC des Kreises OBC sind, d. h., ON ist die innere und OT ist die äussere Halbierungslinie des Winkels BOC. Der Punkt N, der als Mittelpunkt dienen soll, um den für den Spiralenbogen zu substituierenden Bogen BC zu beschreiben, kann also als Endpunkt des Durchmessers des Kreises OBC construiert werden, welcher auf der Sehne BC senkrecht steht. Den Mittelpunkt P des folgenden Bogens CD, der der Durchschnittspunkt der Normalen in C und D sein muss, erhält man als Durchschnittspunkt der Geraden CN mit der Geraden, welche die Sehne CD senkrecht halbiert, oder mit der äusseren Halbierungslinie des Winkels COD. Und so weiter.

77. Daraus entnimmt man die Construction der gleichwinkligen Spirale mittelst Kreisbogen. Man theile (Fig. 67) den Winkel-



raum (vier Rechte) um den Pol O in eine gewisse Zahl gleicher Theile, hinreichend klein, dass der entsprechende Spiralenbogen

jedes Theiles durch einen Kreisbogen ersetzt werden kann. Auf zwei aufeinanderfolgenden Radienvectoren nehme man die Punkte A, B an, durch welche die Spirale gehen soll. Der Mittelpunkt M des Bogens AB ist dann der Endpunkt desjenigen Durchmessers des Kreises OAB, welcher auf der Sehne senkrecht steht. Es sei N der Punkt, wo BM die äussere Halbierungslinie des Winkels schneidet, der zwischen OB und dem folgenden Radiusvector liegt. Aus dem Centrum N beschreibe man den Bogen BC. Analog sei P der Punkt, in dem CN die äussere Halbierungslinie des zwischen OC und dem folgenden Radiusvector liegenden Winkels schneidet; mit P als Mittelpunkt beschreibt man dann den Bogen CD. Und so weiter*).

78. Statt den Punkt A (ausser O und B) beliebig anzunehmen, kann man auch den constanten Winkel, den die Tangente mit dem Radiusvector macht, als gegeben betrachten. In diesem Falle ziehe man BS, welche mit OB den gegebenen Winkel bildet, und es sei S der Durchschnittspunkt der Tangente BS mit der innern Halbierungslinie des Winkels, welchen OB mit dem vorhergehenden Radiusvector bildet, dann ist der Punkt A durch den Durchschnittspunkt dieses Radius mit dem Kreise OBS gegeben. Nachdem dann der Punkt M dieses Kreises gefunden ist, welcher dem Punkte S diametral gegenüberliegt, geht man mit der Methode weiter vorwärts, die eben auseinandergesetzt ist.**).



79. Oftmals jedoch kann man sich von der Beschreibung solcher Kreisbogen losmachen, und sich damit begnügen, eine Reihe von Punkten der Curve zu finden, die hinreichend benachbart sind, dass sie unter einander durch eine continuirliche Linie verbunden werden können. Zu diesem Zwecke nehme man das Elementardreieck OA_1B_1 (Fig. 68), dessen Winkel bei O sehr klein sei, und construiere zwischen den Seiten OA_1, OB_1 die gebrochene Linie $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1\dots$, deren Seiten abwechselnd zu A_1B_1 parallel und antiparallel sind. Dann nehme man auf den Radien OA, OB, OC, OD, OE, OF, ..., die zwischen sich jedesmal einen Winkel gleich dem constanten Winkel A_1OB_1 ein-

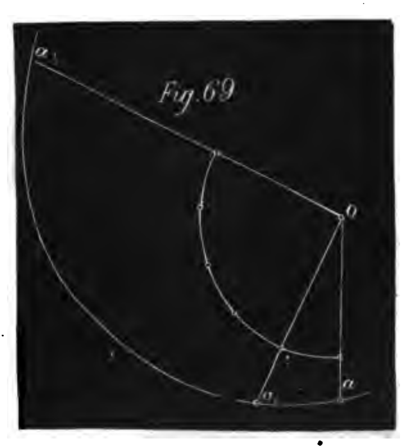
*) Diese Construction ist mir von Herrn Ingenieur A. Sayno an die Hand gegeben.

**) Auch diese Construction verdankt man Herrn A. Sayno.

schliessen, die Punkte A, B, C, D, E, F, ... in der Art, dass $OA_1 = OA$, $OB_1 = OB$, $OC_1 = OC$, $OD_1 = OD$, $OE_1 = OE$ ....

80. Ist diese Spirale einmal beschrieben, so dient sie zur Lösung der Aufgabe von der Wurzelausziehung.

Man verlangt die i-te Wurzel des gegebenen Verhältnisses zweier gegebenen Segmente a, a_i. Setzt man $a_i = a \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^i$, so handelt es sich um die Bestimmung des Verhältnisses $\frac{b}{c}$. Man ziehe nach der Spirale (Fig. 69, wo $i = 5$) die Radiivectoren a, a_i, und theile den von ihnen eingenommenen Winkel in i gleiche Theile. Die $i-1$ theilenden Radiivectoren $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$ sind dann die Zwischenglieder einer geometrischen Progression von $i+1$ Gliedern, deren erstes a und deren letztes a_i ist. Das Verhältniss $a_1 : a$ der beiden ersten Glieder wird also das gesuchte Verhältniss sein.



81. Zwei Radiivectoren, welche einen constanten Winkel einschliessen, haben ein constantes Verhältniss. Daraus folgt, dass, wenn man die Summe oder Differenz der Winkel nimmt, welche zwei Paar von Radiivectoren a_1 und b_1, a_2 und b_2 einschliessen, der resultierende Winkel von zwei Radienvectoren eingeschlossen wird, deren Verhältniss im ersten Falle gleich dem Producte, im zweiten gleich dem Quotienten der Verhältnisse $a_1 : b_1$, $a_2 : b_2$ ist. Das heisst, die gleichwinklige Spirale leistet im graphischen Calcul dieselben Dienste, wie eine Logarithmentafel beim numerischen Rechnen: die Verhältnisse der Radiivectoren entsprechen den Zahlen, die Winkel den Logarithmen. Dieser Eigenschaft halber heisst die Curve in Rede auch l o g a r i t h m i s c h e S p i r a l e. Es versteht sich von selbst, dass man, wenn als constanter Nenner dieser Verhältnisse der Radiusvector der linearen Einheit gleich genommen wird, die Radiivectoren selbst statt ihre Verhältnisse zur Einheit betrachten würde.

Wenn man z. B. das Segment x construieren wollte, welches durch die Gleichung

$$x = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

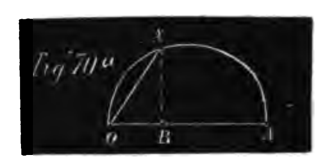
gegeben ist, so wäre x der Radiusvector der Spirale, welcher mit

dem Radius 1 einen Winkel gleich dem arithmetischen Mittel der Winkel bildet, welche die Radien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mit demselben Radius 1 einschliessen.

82. Handelt es sich jedoch nur um die Ausziehung der Quadratwurzel, so ist es, statt auf die Spirale zu recurrieren, viel einfacher, sich der bekannten Constructionen der Elementargeometrie zu bedienen. Verlangt man nämlich $x = \sqrt{ab}$, so construiert man x als geometrisches Mittel der Segmente a, b.

Sind die Segmente auf einer Geraden in demselben Sinne angeordnet OA = a, OB = b, so ist (Fig. 70) x die Länge der Tan-





gente OX, welche von O aus an einen Kreis gezogen ist, welcher durch A und B beschrieben ist; oder (Fig. 70ª) nachdem der Kreis beschrieben ist, dessen Durchmesser das grössere Segment OA ist, wird x die Sehne OX sein, deren Projection auf dem Durchmesser das andere Segment b ist.



Liegen die Segmente OA = a, OB = b ebenfalls auf einer Geraden, haben aber entgegengesetzten Sinn (Fig. 71), so wird, wenn wieder über AB ein Halbkreis beschrieben ist, x die Ordinate sein, welche im Punkte O errichtet ist.

83. Dieselben Zwecke, zu denen die gleichwinklige Spirale dient, kann man auch leicht durch eine andere Curve erreichen, welche man die l o g a r i t h - m i s c h e C u r v e nennt.

Man ziehe (Fig. 72) zwei Axen Ox, Oy; auf der ersten nehme man vom Anfang O aus gerechnet die Segmente

$$O0, O1, O2, O3, \ldots.$$

bezüglich gleich den Gliedern

$$x_0, x_1 = x_0 \frac{m}{n}, x_2 = x_0 \left(\frac{m}{n}\right)^2, x_3 = x_0 \left(\frac{m}{n}\right)^3, \ldots.$$

einer geometrischen Progression, deren erstes Glied x_0 und deren Quotient $\frac{m}{n}$ ist ($m > n$ vorausgesetzt); auf der zweiten Axe nehme man gleichzeitig auch von O aus gerechnet die Segmente

$$O0, O1, O2, O3, \ldots.$$

bezüglich gleich den Gliedern

$$y_0 = 0, y_1 = 1, y_2 = 2l, y_3 = 3l, \ldots.$$

einer arithmetischen Progression mit dem ersten Gliede 0 und der Differenz l.*) Die Glieder der beiden Progressionen, welche dem Index r entsprechen, sind

$$x_r = x_0 \left(\frac{m}{n}\right)^r, \quad y_r = rl;$$

daraus ergiebt sich

$$x_r = x_0 \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{y_r}{l}}.$$

Zwischen jedes Paar von aufeinanderfolgenden Gliedern jeder der beiden Progressionen kann man ein neues Glied interpolieren, um dadurch zwei neue Progressionen zu erhalten, in deren ersten der Quotient $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$ oder $\frac{\sqrt{mn}}{n}$, und die Differenz der letztern $\frac{l}{2}$ ist. Dies geschieht, indem man beachtet, dass in jeder geometrischen (arithmetischen) Progression ein beliebiges Glied das geometrische (arithmetische) Mittel zwischen dem ihm vorhergehenden und folgenden Terme ist. Construieren wir z. B. das geometrische Mittel zwischen x_r, x_{r+1} und das arithmetische zwischen y_r, y_{r+1}, so erhalten wir die beiden entsprechenden Glieder

$$(x_r x_{r+1})^{\frac{1}{2}} = x_0 \left(\frac{m}{n}\right)^{r+\frac{1}{2}}$$

$$\tfrac{1}{2}(y_r + y_{r+1}) = (r + \tfrac{1}{2})\, l$$

der beiden neuen Progressionen. In diesen kann man analog zwischen je zwei aufeinanderfolgende Glieder ein Glied interpolieren, u. s. w., bis man zu zwei Progressionen gelangt, für welche der Quotient $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{2^i}}$ und die Differenz $\frac{l}{2^i}$ so klein sind, als man will**). Bezeichnen wir durch x und y zwei entsprechende Glieder, so haben wir stets

$$1) \ldots . \; x = x_0 \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{y}{l}},$$

*) In der Reihe der Zahlen auf Oy fällt Null mit dem Anfangspunkte O zusammen, weil $y_0 = 0$ genommen ist.

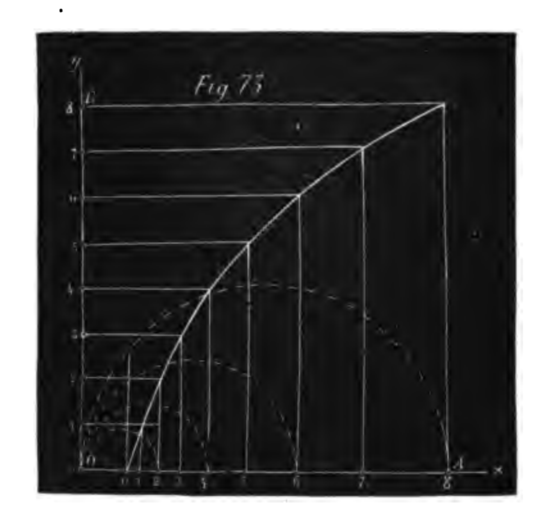
**) i ist die Zahl der ausgeführten Interpolationen.

oder

$$2) \ldots . y = l \frac{\log \frac{x}{x_0}}{\log \frac{m}{n}},$$

wo die Logarithmen in einem beliebigen Systeme genommen sind. Wir wollen die Punkte der Axen Ox, Oy **entsprechend** nennen, welche die Endpunkte der entsprechenden Segmente x und y sind. Durch diese correspondierenden Punkte ziehe man die Parallelen zu den Axen, d. h. durch den Endpunkt von x die Parallele zu Oy, und durch den Endpunkt von y die Parallele zu Ox. Die so gezogenen Geraden werden sich in einem Punkte M schneiden; x und y heissen dann die Coordinaten des Punktes M, und speciell **Abscisse** und **Ordinate**. Die Gleichung 1) oder 2), welche die Relation zwischen den Coordinaten des Punktes M ausspricht, heisst die **Gleichung** der Curve, welche der Ort aller zu M analoger Punkte ist. Diese Curve nennt man **logarithmische Curve** deshalb, weil die Ordinate proportional ist dem Logarithmus einer Zahl, welche der Abscisse proportional ist.

84. Diese Curve construiert man daher **punctweise** in folgender Art (Fig. 73). Nach Festlegung der beiden Axen Ox, Oy



(etwa unter rechtem Winkel) nehme man auf Oy ein Segment OB = O (2') = 1, wo 1 als Längeneinheit auf Oy angesehen werden kann; auf Ox dagegen nehme man ein Segment OA = O (2')

$= x_0 \frac{m}{n}$, wo $O0 = x_0$ die Längeneinheit des Massstabes auf Ox sein kann*), und $\frac{m}{n}$ die Basis des logarithmischen Systems (die Zahl 10).

Man theile OB in 2^i gleiche Theile und es seien $1, 2, 3, \ldots, 2^{i-1}, \ldots, 2^i (= B)$ die Theilpunkte. Um die entsprechenden Punkte von Ox zu finden, nehme man das geometrische Mittel zwischen x_0 und $x_0 \frac{m}{n}$; d. h., man beschreibe einen Halbkreis über OA als Durchmesser und trage auf OA von O aus die Länge der Sehne auf, welche O0 zur Projection hat; wir erhalten so den Punkt 2^{i-1} von Ox, der dem gleichnamigen Punkte von Oy entspricht (d. h. dem Halbierungspunkt von OB). Analog nehme man das geometrische Mittel zwischen O0 und $O2^{i-1}$, und das geometrische Mittel zwischen $O2^{i-1}$ und OA und man erhält dann die den Mittelpunkten der Segmente $O2^{i-1}$, $2^{i-1}B$ von Oy entsprechenden Punkte von Ox. Und so weiter.

Nun führe man durch die Theilpunkte von Ox Parallele zu Oy, und durch die Theilpunkte von Oy Parallele zu Ox; die Punkte, in denen sich die durch gleichnamige Punkte geführten Geraden schneiden, gehören der logarithmischen Curve an, die man construieren wollte. Da dem Werthe $y = y_0 = 0$ der Werth $x = x_0 = O0$ entspricht, so geht die Curve durch den Nullpunkt der Theilung von Ox.

85. Es ist auch sehr leicht, die Tangente der Curve in einem beliebigen ihrer Punkte zu construieren (Fig. 74). Es seien M, N zwei Punkte der Curve in geringem Abstande von einander; MP, NQ parallel zu Ox, MR parallel zu Oy, und T der Punkt, in welchem Oy von der Sehne MN geschnitten wird. Die ähnlichen Dreiecke TPM, MRN geben:

$$TP : MP = MR : NR,$$

oder auch

$$TP : MP = OQ - OP : NQ - MP.$$

Setzt man $OP = y$, $PQ = h$, so sind MP, NQ die den Ordinaten y, $y + h$ entsprechenden Abscissen x, und folglich

$$MP = x_0 \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{y}{l}}, \quad NQ = x_0 \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{y+h}{l}},$$

*) Da die x viel schneller wachsen als die y, so kann man, um die Construction zwischen beschränkten Grenzen zu halten, die Einheit x_0 viel kleiner als 1 nehmen, z. B.: $x_0 \frac{m}{n} = 1$.

also $$TP = \frac{h\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{y}{l}}}{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{y+h}{l}} - \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{y}{l}}} = l\,\frac{\frac{h}{l}}{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{h}{l}} - 1}.$$

Setzen wir jetzt voraus, dass der Punkt N sich dem Punkte M immer mehr und mehr nähere, d. h., dass h gegen Null convergiert, so wird die NMT sich ebenfalls immer mehr und mehr der Lage der Tangente in M nähern, und das Segment TP, Projection von TM auf Oy, geht in dasjenige über, was man Subtangente zu nennen pflegt. Die Grenze aber*), welcher der Bruch

$$\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{h}{l}} - 1}{\frac{h}{l}}$$

zustrebt, wenn h gegen Null convergiert, ist der natürliche Logarithmus von $\frac{m}{n}$, den wir mit $l\,\frac{m}{n}$ bezeichnen wollen; als Grenze erhalten wir also

$$TP = \frac{l}{l\,\frac{m}{n}},$$

d. h., die Subtangente ist für sämmtliche Punkte der Curve constant**).

Daraus folgt, dass sich sämmtliche Tangenten in den verschiedenen Punkten der Curve unmittelbar ziehen lassen, sobald man nur die Tangente in einem Punkte construiert hat.

86. Nachdem so die logarithmische Curve construiert ist, lassen sich mit derselben sämmtliche Probleme lösen, zu denen die gewöhnlichen Logarithmentafeln dienen. Man soll z. B. die r-te Wurzel des Verhältnisses zweier Geraden p, q construieren. Man nehme auf Ox die Abscissen $x' = p$, $x'' = q$, und suche mit Hülfe der Curve die entsprechenden Ordinaten y', y''. Die der Ordinate

$$\frac{1}{r}(y' - y'')$$

entsprechende Abscisse hat dann den Werth:

$$x_0 \sqrt[r]{\frac{p}{q}}.$$

*) Baltzer, *Elemente der Mathematik* I, 4. Aufl. (Leipzig, 1872), S. 200.
**) Salmon, *Higher plane curves*, 2d ed. (Dublin, 1873), num. 314.

Man suche zweitens die r-te Wurzel des Produktes der r Geraden $p_1, p_2, \ldots, p_r$. Man nehme auf Ox die Abscissen $x_1 = p_1$, $x_2 = p_2$, $x_3 = p_3, \ldots, x_r = p_r$ und bestimme die entsprechenden Ordinaten $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_r$; dann ist die der Ordinate

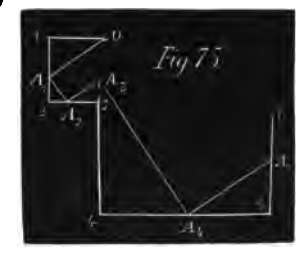
$$\frac{1}{r}(y_1 + y_2 + \ldots + y_r)$$

entsprechende Abscisse x genau gleich dem gesuchten Werthe

$$\sqrt[r]{p_1 \cdot p_2 \cdots p_r}.$$

VI. AUFLÖSUNG DER NUMERISCHEN GLEICHUNGEN.*)

87. Es seien $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ $n+1$ der Grösse und dem Zeichen nach gegebene Zahlen, und man construiere (Fig. 75) einen polygonalen rechtwinkligen Linienzug, dessen aufeinanderfolgende Seiten 01, 12, 23, ... ihrer Länge nach den gegebenen Zahlen proportional sind. Was den Sinn jeder Seite betrifft, halten wir uns an folgendes Gesetz: die r-te und (r+2)-te Seite, die unter einander parallel sind, haben denselben oder entgegengesetzten Sinn, jenachdem die Zeichen der Zahlen a_{r-1}, a_{r+1}, die diesen Seiten proportional sind, ungleich oder gleich sind.**)



*) Lill, *Résolution graphique des équations numérique d'un degré quelconque à une inconnue* (Nouvelles Annales de Mathématiques, 2e série, t. 6, Paris, 1867), p. 359.

**) Um mit möglichster Präcision den Sinn jeder Seite der gebrochenen Linie zu fixieren, dient folgende Bestimmung. Man nehme zwei senkrechte Axen XOX, YOY und bestimme für jede derselben den positiven Sinn; dann wollen wir festsetzen, dass wir der Zahl, welche die Länge eines Segmentes ausdrückt, den Coefficienten + 1 oder — 1 geben, jenachdem es die positive oder negative Richtung von XOX hat, und den Coefficienten + i oder — i (wo $i = \sqrt{-1}$, d. h. $i^2 = -1$), jenachdem das Segment die positive oder negative Richtung von YOY besitzt. Nun bilde man einen Linienzug, dessen aufeinanderfolgende Seiten

01, 12, 23, 34, 45, 56, ...

gleich $a_0, ia_1, i^2a_2, i^3a_3, i^4a_4, i^5a_5, \ldots$,

d. h. gleich $a_0, ia_1, -a_2, -ia_3, a_4, ia_5, \ldots$.

sind, so dass also die 1te, 3te, 5te ... Seite der XOX parallel sein werden, und die andern zu YOY; ausserdem haben zwei parallele Seiten, die nur durch eine auf beiden senkrechte Seite geschieden werden, gleichen oder entgegengesetzten Sinn, jenachdem die entsprechenden Zahlen a entgegengesetzte oder dieselben Zeichen haben.

Nachdem man hierauf auf der Geraden 12 einen Punkt A_1 fixiert hat, nehme man 0A als erste Seite eines zweiten rechtwinkligen Linienzuges von n Seiten, dessen Scheitel $A_1, A_2, A_3, \ldots$ der Reihe nach in die Seiten 12, 23, 34, ... des ersten Linienzuges fallen.

Die Dreiecke $01A_1$, A_12A_2, A_23A_3, A_34A_4, ... sind sämmtlich einander ähnlich, und geben also

$$\frac{01}{A_1 1} = \frac{A_1 2}{A_2 2} = \frac{A_2 3}{A_3 3} = \frac{A_3 4}{A_4 4} = \ldots = \frac{A_{n-1} \,.\, n}{A_n \,.\, n},$$

und hieraus erhält man, unter Beachtung der Identitäten,

$$\begin{array}{ll} 01 = a_0, & A_1 2 = A_1 1 + a_1, \\ 12 = a_1, & A_2 3 = A_2 2 + a_2, \\ 23 = a_2, & A_3 4 = A_3 3 + a_3, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overline{n-1} \,.\, n = a_{n-1}, & A_n \,.\, \overline{n+1} = A_n \,.\, n + a_n, \\ n \,.\, \overline{n+1} = a_n, & \end{array}$$

und

$$\frac{A_1 1}{01} = x, \text{ also } A_1 1 = a_0 x$$

gesetzt, nach und nach:

$$\begin{array}{ll} A_1 2 & = a_0 x + a_1, \\ A_2 2 & = a_0 x^2 + A_1 x, \\ A_2 3 & = a_0 x^2 + a_1 x + a_2, \\ A_3 3 & = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n \,.\, n & = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x, \\ A_n \,.\, \overline{n+1} & = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n, \end{array}$$

also hat das Segment $A_n \,.\, \overline{n+1}$, welches zwischen dem Endpunkt des ersten und zweiten polygonalen Linienzuges eingeschlossen ist, den Werth, welchen das Polynom

$$F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

annimmt, wenn man für x das Verhältniss des Segmentes $A_1 1$ zu dem Segmente 01 oder a_0 einsetzt. Hält man a_0 als positiv fest, so sind die Zeichen von x und a_1 gleich oder entgegengesetzt, jenachdem $A_1 1$, 12 denselben oder entgegengesetzten Sinn haben.

Fallen die Endpunkte der beiden Linienzüge zusammen, so ist identisch $F(x) = 0$; dann heisst x eine Wurzel der Gleichung $F(z) = 0$. Die reellen Wurzeln der Gleichung $F(z) = 0$ sind also die Verhältnisse $A_1 1 : 01$, welche solchen rechtwinkligen eingeschriebenen Linienzügen entsprechen, deren Endpunkte mit dem Punkte $\overline{n+1}$ zusammenfallen.

Auf Grund dieser Eigenschaft kann man sagen, der Linienzug $0123 \ldots \overline{n+1}$ repräsentiere das ganze Polynom $F(z)$.

88. Beschreibt man dem ersten Linienzuge einen neuen rechtwinkligen Linienzug $0B_1B_2 \ldots B_n$ ein, so hat man, wenn man das Verhältniss $B_1 1 : 01$ durch y bezeichnet, analog

$$B_n . \overline{n-1} = f(y) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Für die Coefficienten a setze man ihre Werthe

$$\begin{aligned}
a_0 &= 01,\\
a_1 &= 12 = A_1 2 - A_1 1 = A_1 2 - 01 . x,\\
a_2 &= 23 = A_2 3 - A_2 2 = A_2 3 - A_1 2 . x,\\
a_3 &= 34 = A_3 4 - A_3 3 = A_3 4 - A_2 3 . x,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{n-1} &= \overline{n-1}.n = A_{n-1}.n - A_{n-1}.\overline{n-1} = A_{n-1}.n - A_{n-2}.\overline{n-1}.x,\\
a_n &= n.\overline{n+1} = A_n.\overline{n+1} - A_n.n = A_n.\overline{n+1} - A_{n-1}.n.x,
\end{aligned}$$

und man erhält:

$$\begin{aligned}
B_n . \overline{n+1} = 01 . y^n &+ (A_1 2 - 01 . x)\, y^{n-1}\\
&+ (A_2 3 - A_1 2 . x)\, y^{n-2}\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ (A_{n-1} n - A_{n-2} \overline{n-1} . x)\, y\\
&+ A_n \overline{n+1} - A_{n-1} n . x\\
= (y-x)\, [01 . y^{n-1} &+ A_1 2 . y^{n-2} + A_2 3 . y^{n-3} + \ldots\\
&\ldots + A_{n-1} n] + A_n . \overline{n+1}.
\end{aligned}$$

Es ist aber

$$B_n . \overline{n+1} - A_n . \overline{n+1} = B_n A_n,$$

und

$$y - x = \frac{B_1 1 - A_1 1}{01} = \frac{B_1 A_1}{01};$$

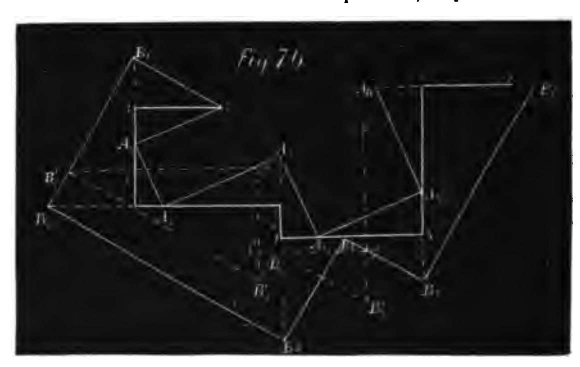
folglich ist

$$01 . \frac{B_n A_n}{B_1 A_1} = 01 . y^{n-1} + A_1 2 . y^{n-2} + A_2 3 . y^{n-3} + \ldots + A_{n-1} n.$$

Dieses Resultat lässt sich folgendermassen aussprechen (Fig. 76, a. f. S., wo n = 6 ist):

> In einem rechtwinkligen Linienzug von $n+1$ Seiten $0123 \ldots n+1$ seien zwei rechtwinklige Linienzüge von n Seiten $0A_1A_2 \ldots A_n$, $0B_1B_2 \ldots B_n$ eingeschrieben; dann bilde man einen neuen rechtwinkligen Linienzug $012'3' \ldots n'$ von n Seiten, welche der Reihe nach den Seiten des ersten Linienzuges parallel sind und gleich 01, $A_1 2, A_2 3, \ldots, A_{n-1} n$. In diesen beschreibe man den rechtwinkligen Linienzug von $n-1$ Seiten $0B_1B_2'$, $\ldots B'_{n-1}$, welcher mit dem schon beschriebenen Linienzug $0B_1B_2 \ldots B_n$ die Seite $0B_1$ gemein hat, dann ist:
>
> $$\frac{B'_{n-1} n'}{01} = \frac{B_n A_n}{B_1 A_1};$$

d. h., das Segment $B'_{n-1}n'$ ist das Resultat der Division von $F(y)-F(x)$ durch $y-x$. Darin bedeutet F das durch den ersten Linienzug $0123..n+1$ dargestellte Polynom, und x und y sind die Verhältnisse $A_1 1:01$; $B_1 1:01$.



Oder auch mit andern Worten:

Der Linienzug $012'3'...n'$ stellt das Polynom

$$\frac{F(z)-F(x)}{z-x},$$

dar oder das Polynom $F(z):(z-x)$, im Falle x eine Wurzel der Gleichung $F(z)=0$ ist.

89. Die schon oben betrachteten ähnlichen Dreiecke geben ferner: $\frac{01}{0A_1}=\frac{A_1 2}{A_1A_2}=\frac{A_2 3}{A_2A_3}=\frac{A_3 4}{A_3A_4}=\ldots=\frac{A_{n-1}n}{A_{n-1}A_n}$, und folglich lässt sich die Gleichung auch, wie folgt, schreiben:

$$0A_1\cdot\frac{B_nA_n}{B_1A_1}=0A_1\cdot y^{n-1}+A_1A_2\cdot y^{n-2}+A_2A_3\cdot y^{n-3}+\ldots+A_{n-1}A_n.$$

Das Resultat lässt sich folgendermassen interpretieren (Fig. 77):

In den rechtwinkligen Linienzug von $n+1$ Seiten $0123\ldots n+1$ (Fig. 77, wo $n=6$) beschreibe man die beiden neuen rechtwinkligen Linienzüge von n Seiten $0A_1A_2\ldots A_n$, $0B_1B_2\ldots B_n$, und beschreibe in den ersten derselben einen rechtwinkligen Linienzug von $n-1$ Seiten $0C_1C_2\ldots\ldots C_{n-1}$, wo

$$\frac{C_1A_1}{0A_1}=y=\frac{B_1 1}{01}$$

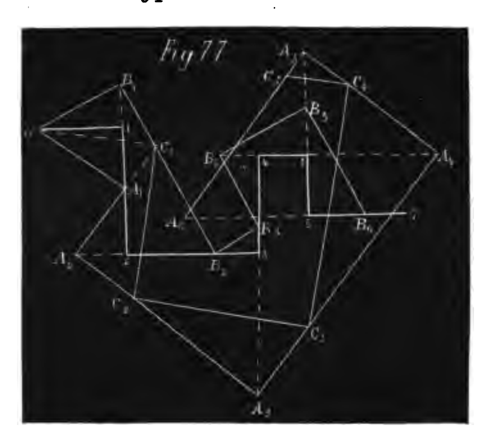
ist, dann ist

$$\frac{B_nA_n}{B_1A_1}=\frac{C_{n-1}A_n}{0A_1};$$

das heisst, $C_{n-1}A_n$ ist auch gleich dem Quotienten

$$\frac{F(y)-F(x)}{y-x},$$

jedoch mit $\frac{0A_1}{01}$ multipliciert.



Mit andern Worten:

Reduciert man die Längen im Verhältniss $0A_1 : 01$, so stellt der Linienzug $0A_1A_2 \ldots A_n$ das Polynom

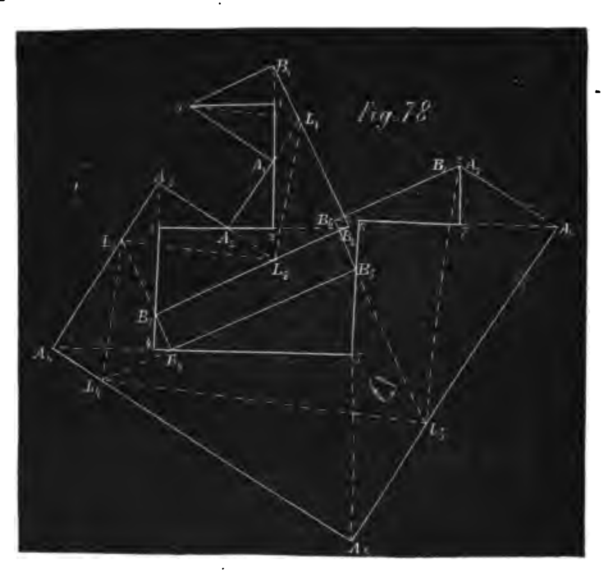
$$\frac{F(z)-F(x)}{z-x}$$

oder das Polynom $F(z):(z-x)$ dar, wenn im letztern Falle x eine Wurzel der Gleichung $F(z)=0$ ist.

Jeder rechtwinklige Linienzug von n Seiten, der dem gegedenen Linienzuge eingeschrieben ist, und mit demselben die Enddunkte gemein hat, ist also ein **auflösender** Linienzug in Bezug auf den gegebenen, weil er den Quotienten darstellt, welcher durch Division des Polynoms, das der gegebene Linienzug repräsentiert, burch einen seiner linearen Factoren entsteht.

90. Es sei das ganze Polynom n-ten Grades $F(z)$ wieder dargestellt durch den Linienzug $0123 \ldots n+1$. In dasselbe mögen (Fig. 78 a. f. S.) die beiden Linienzüge $0A_1A_2 \ldots A_n$, $0B_1B_2 \ldots B_n$ eingeschrieben sein. Wir wollen annehmen, dass die Punkte A_n, B_n beide mit dem Endpunkte $n+1$ des gegebenen Linienzuges zusammenfallen; d. h., es seien $0A_1A_2 \ldots$, $0B_1B_2 \ldots$ zwei **auflösende** Linienzüge des gegebenen Linienzuges. Es seien ferner $L_1, L_2, \ldots, L_{n-2}$ die Durchschnittspunkte der Seitenpaare A_1A_2, B_1B_2; A_2A_3, B_2B_3; $\ldots$; $A_{n-2}A_{n-1}$, $B_{n-2}B_{n-1}$. Dann sind die Dreiecke $0A_1B_1$,

$L_1A_2B_2$ ähnlich, da ihre entsprechenden Seiten aufeinander senkrecht stehen; aus demselben Grunde sind die Dreiecke $A_1B_1L_1$, $A_2B_2L_2$ ähnlich, also sind auch die Vierecke $0A_1B_1L_1$, $L_1A_2B_2L_2$



ähnlich, woraus folgt, dass die Seiten $0L_1$, L_1L_2 aufeinander senkrecht stehen. Auf dieselbe Weise kann man zeigen, dass die Winkel $L_1L_2L_3$, $L_2L_3L_4$, ..., $L_{n-3}L_{n-2}\overline{n+1}$ rechte sind.

Folglich bilden die Punkte $0L_1L_2 \ldots L_{n-2}\overline{n+1}$ die Scheitel eines Linienzuges von $n-1$ Seiten, welcher rechtwinklig ist, und sowohl in den Linienzug $0A_1A_2 \ldots$ wie in den andern $0B_1B_2 \ldots$ eingeschrieben ist; das heisst, $0L_1L_2 \ldots$ ist ein auflösender Linienzug in Betreff jedes der beiden Linienzüge $0A_1A_2 \ldots$, $0B_1B_2 \ldots$ Mit andern Worten, reduciert man die Längen im Verhältniss $\frac{0L_1}{01}$, so stellt der Linienzug $0L_1L_2 \ldots \overline{L_{n-2}}$ das Polynom $(n-2)$ten Grades

$$\frac{F(z)}{(z-x)\,(z-y)}$$

dar, wo $x = 0A_1 : 01$, $y = 0B_1 : 01$ ist.

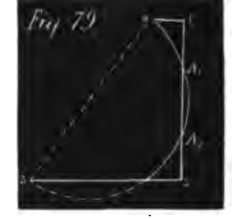
91. Es sei die Gleichung des 2-ten Grades

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$$

gegeben.

Nachdem man den Linienzug 0123 (Fig. 79) construiert hat, dessen Seiten 01, 12, 23 die Coefficienten a_0, a_1, a_2 darstellen, genügt

es, um eine Wurzel zu finden, einen rechten Winkel zu construieren, dessen Scheitel A auf 12 fällt, und dessen Schenkel durch 0,3 gehen. Wir beschreiben also den Halbkreis über 03 als Durchmesser; schneidet dieser 12 in den beiden Punkten A_1, A_2, so sind $\frac{A_1 1}{a_0}$, $\frac{A_2 1}{a_0}$ die Wurzeln der gegebenen Gleichung.



Nach bekannten Eigenschaften des Kreises hat man:

$$A_2 1 = 2A_1,$$

und folglich ist

$$A_1 1 + A_2 1 = 2A_1 + A_1 1 = 21,$$

oder auch

$$\frac{A_3 1 + A_2 1}{a_0} = -\frac{a_1}{a_0},$$

das heisst, die Summe der Wurzeln ist $-\frac{a_1}{a_0}$.

Ferner geben die ähnlichen Dreiecke $01A_1$, $A_1 23$

$$01 : A_1 1 = A_1 2 : 32,$$

oder auch

$$a_0 : A_1 1 = - A_2 1 : - a_2,$$

folglich ist:

$$\frac{A_1 1 \,.\, A_2 1}{a_0^2} = \frac{a_2}{a_0};$$

d. h., das Produkt der Wurzeln ist gleich $\frac{a_2}{a_0}$.

Auf das vorstehende Theorem (Nr. 88) gestützt hat Lill einen einfachen Apparat ersonnen, der den Zweck hat, die Wurzeln einer gegebenen numerischen Gleichung zu bestimmen. Der Apparat besteht in einer kreisförmigen Scheibe, welche von Holz sein kann, und völlig eben sein muss; auf dieselbe ist ein carriertes Papier geklebt. Im Centrum der Scheibe, das fest bleiben muss, steht ein Zapfen, um welchen eine andere Scheibe von gleichem Durchmesser aus geschliffenem Glase sich drehen kann. Da das Glas durchsichtig ist, so kann man mit Hilfe des carrierten Papierblattes auf der untern Scheibe unmittelbar auf ihm den der vorgelegten Gleichung entsprechenden Linienzug verzeichnen. Lässt man dann die Glasplatte sich drehen, so unterstützt das carrierte Papier das Auge um den Linienzug zu finden, welcher eine Wurzel bestimmt. Eine Theilung des Umfanges der carrierten Scheibe lässt aus der Abweichung der ersten Seite des ersten Linienzuges von der ersten Seite des zweiten unmittelbar auf die Grösse der Wurzel schliessen. Zu diesem Endzweck muss die erste Seite des der Gleichung entsprechenden Linienzuges gegen den Nullpunkt der Theilung gerichtet werden.

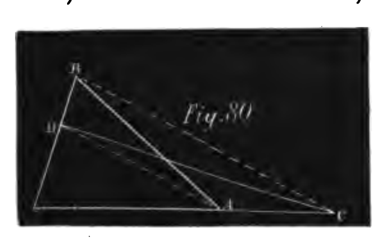
VII. VERWANDLUNG EBENER FIGUREN.*)

92. Eine gegebene Figur auf eine gegebene Basis b reducieren heisst, diese Figur in ein Rechteck verwandeln, dessen Basis b ist, oder auch eine Gerade f bestimmen, welche mit b multipliciert den Flächeninhalt der gegebenen Figur liefert. Statt ein Rechteck mit der Grundlinie b zu construieren, kann man auch ein Dreieck von der Basis 2b beschreiben; die Höhe dieses Dreiecks ist dann die Gerade f. Das Segment b heisst Reductionsbasis.

Reduciert man mehrere Figuren auf dieselbe Basis b, so sind die entsprechenden Geraden f_1, f_2.... den Flächeninhalten jener proportional; daraus folgt, dass die Reduction einer Figur auf eine gegebene Basis dasselbe ist mit der Bestimmung des Flächeninhalts der Figur.

Die gegebene Figur sei das Dreieck OAB (Fig. 80), dessen Basis OA durch a, und dessen Höhe durch h bezeichnet werde. Da durch die Verwandlung der Flächeninhalt unverändert bleiben muss, so haben wir $fb = \frac{1}{2}ah$, und folglich

$$f = a \cdot \frac{h}{2b} = h \cdot \frac{a}{2b},$$

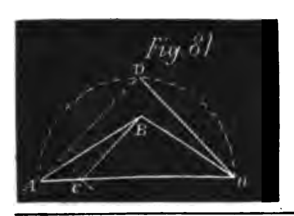


das heisst, es handelt sich um die Multiplication von a mit dem Verhältniss h : 2b, oder auch von h mit dem Verhältniss a : 2b.

Folglich nehme man OC = 2b, verbinde C mit B und ziehe AD parallel zu CB.

Oder auch, man nehme auf OB den Punkt D, dessen Abstand von OA = 2b ist, ziehe DA und BC dazu parallel.

Zieht man CD, so sind die Dreiecke OAB, OCD äquivalent, weil man sie erhält, indem man ein und demselben Dreiecke OAD die äquivalenten Dreiecke ADB, ADC hinzufügt oder von ihm wegnimmt (jenachdem nämlich OC grösser oder kleiner als OA ist). Das gesuchte Segment f ist daher bei der ersten Construction die Höhe des Punktes D über OC, in der zweiten die Länge von OC.



93. Es ist nicht nöthig, dass eine der Längen 2b, f in eine Seite des gegebenen Dreiecks fällt. Man kann als doppelte Basis 2b eine Gerade BC (Fig. 81) nehmen, die vom Scheitel B nach der Gegenseite OA gezogen ist, wenn nur 2b nicht kleiner ist, als der Abstand von B nach OA; dann ist die entsprechende

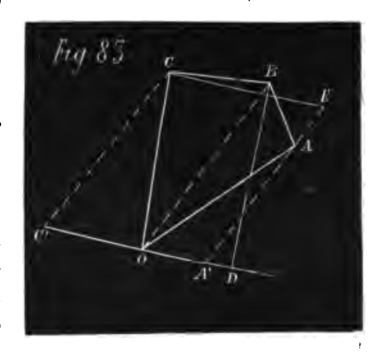
*) CULMANN, *a. a. O.*, Nr. 5.

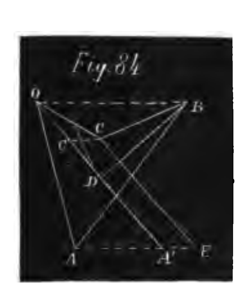
Höhe f die Gerade OD, Antiprojection von OA auf BC. Oder man kann, wenn 2b nicht grösser als OA ist, als doppelte Basis 2b die Gerade OD nehmen, die Sehne des Halbkreises vom Durchmesser OA. In diesem Falle ist die zu der Supplementarsehne DA Parallele BC die gesuchte Höhe f.

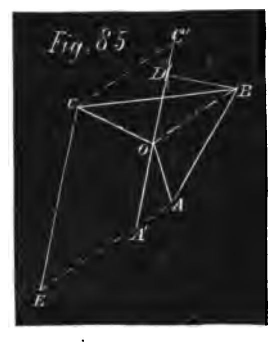
94. Man soll das Viereck ABCD auf die Basis b reducieren (Fig. 82). Zieht man CO parallel zu der Diagonale BD, so verwandelt sich das Viereck in das Dreieck OAB; darauf geht man in der eben beschriebenen Art weiter vor, d. h. z. B. nachdem man BC′ = 2b gezogen hat, so ist die Antiprojection OD′ von OA auf BC′ die gesuchte Länge f.



95. Man kann die Reduction auch ausführen, ohne das gegebene Viereck ABCO vorher in ein Dreieck zu verwandeln. Man nehme die Diagonale OB (Fig. 83, 84, 85, 86), die nicht kleiner als 2b vorausgesetzt wird, als Hypotenuse und construiere das rechtwinklige Dreieck ODB, dessen Kathete BD = 2b ist. Man projiciere mittelst zu OB paralleler Strahlen die Punkte A, C als A′, C′ auf die andere Kathete, dann sind die Dreiecke OCB, OBA äquivalent zu den beiden OC′B, OB′A; aber in diesen ist der Abstand der Basis OC′ oder A′O vom gegenüberliegenden Scheitel gleich 2b, folglich ist die gesuchte Länge f für das Viereck gleich OC′ + A′O = A′C′.

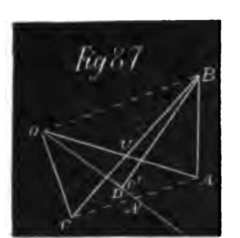








In dem überschlagenen Viereck (Nr. 17) in Fig. 87 fallen, wenn AC parallel BO ist, die Punkte A', C' zusammen, und folglich ist, f = 0. In der That ist in diesem Falle der Flächeninhalt ABCO gleich der Summe zweier Dreiecke UAB, UOC, die einander gleich sind, aber von verschiedenem Zeichen.



96. Die Länge f ist auch gleich dem Segment, welches durch die Geraden AA', CC' auf der Geraden bestimmt wird, die durch A oder C parallel zu A'C' gezogen ist.

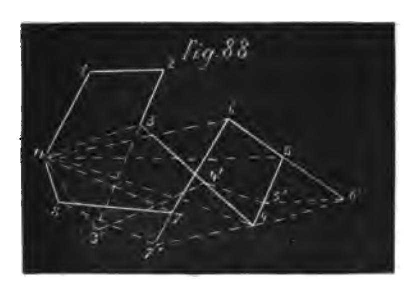
97. Die vorhergehende Construction setzt 2b nicht grösser als die grösste Diagonale OB des Vierecks voraus. Ist 2b > OB, so kann man die Längen 2b und f unter einander vertauschen. Man zieht nämlich AE parallel zu OB und mache CB = 2b; dann construiere man über der Hypotenuse OB ein rechtwinkliges Dreieck ODB, dessen zu OD parallele Kathete gleich CE ist, dann ist die andere Kathete BD = f.

98. Um ein Polygon auf eine gegebene Basis zu reducieren, der Umfang mag verschlungen sein oder nicht, beginnt man mit der Verwandlung desselben in ein äquivalentes Viereck. Dann wendet man auf das Viereck die oben gegebene Construction an, um das Segment f zu erhalten, welches mit der Basis b multipliciert den Flächeninhalt des gegebenen Polygons liefert.

Das gegebene Polygon sei 0123456780 (Fig. 88). Indem man

die	Gerade	87'	parallel	zur	Diagonale	07,
„	„	7'6'	„	„	„	06,
„	„	6'5'	„	„	„	05,
„	„	5'4'	„	„	„	04,
„	„	4'3'	„	„	„	03

zieht, so verwandelt sich das Polygon nach und nach in die äquivalenten Polygone 01234567', 0123456', 012345', 01234', 0123', welche immer eine Seite nach der andern weniger haben *). Am Ende gelangt man zu dem Viereck 0123'.



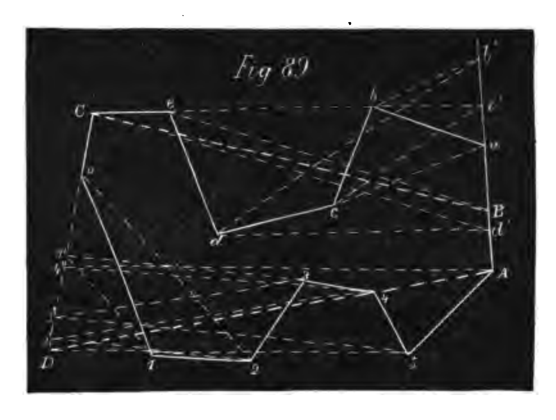
99. Bei dieser Construction sind die neuen Seiten 07', 06', 05', ... der transformierten Polygone Strahlen, welche von dem festen Scheitel 0 ausgehen.

*) Die Dreiecke 078, 077' sind äquivalent, weil die Geraden 07, 87' parallel sind; nimmt man das erste Dreieck von dem gegebenen Polygon weg, und legt das zweite wieder hinzu, so erhält man das neue Polygon 01234567'. Und so weiter.

Man kann aber auch in der Art vorgehen, dass sämmtliche neue Scheitel 7′, 6′, 5′, . . . auf eine feste Seite fallen.

Haben wir z. B. (Fig. 89) den Linienzug AabcdeC012345 und ziehen

11′ parallel zu 20
22′ „ „ 31′
33′ „ „ 42′ , bis sie die feste Seite 0C schneiden,
44′ „ „ 53′
5D „ „ A4′



so bestimmt man die Gerade AD, welche für die gebrochene Linie A543210 substituiert werden kann. Denn, da 11′, 20 parallel sind, so sind die Dreiecke 120, 1′20 äquivalent, und indem man das erste wegnimmt, und das zweite dem gegebenen Polygon hinzufügt, verwandelt sich dieses in AabcdeC1′2345. Ebenso verwandelt sich wegen Aequivalenz der Dreiecke 1′23, 1′2′3 das letztere Polygon in AabcdeC2′345, und so fortfahrend gelangt man zu dem Linienzug AabcdeCD.

Um eine ähnliche Verwandlung für die gebrochene Linie AabcdeC zu bewerkstelligen, ziehen wir

bb′ parallel zu ca
cc′ „ „ db′
dd′ „ „ ec′ , bis sie die feste Seite Aa schneiden,
eB „ „ Cd′

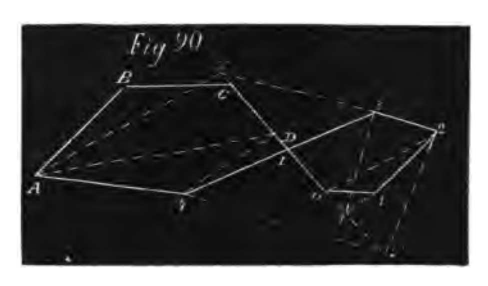
dann ist das ganze Polygon AabcdeCD auf das äquivalente Viereck ABCD reduciert.

100. Diese Methode ist die leichteste und bequemste, um den Flächeninhalt von Figuren zu erhalten, deren Perimeter in den verschiedensten Formen verlaufen. Mit ein wenig Uebung lernt man die Verwandlung rein mechanisch machen, und ohne irgend welche Rücksicht auf die Form des gegebenen Linienzuges zu

nehmen. Diese Constructionen erlauben ausserdem den Zeichen Rechnung zu tragen, so dass, wenn man mit Flächeninhalten von verschiedenem Zeichen zu thun hat, das Resultat ohne Weiteres das Zeichen angiebt, das ihm zukommt.*)

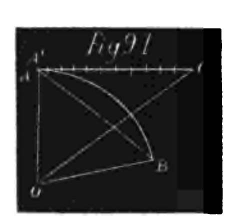
Man habe z.B. den verschlungenen Linienzug (Fig. 90) ABC01234, welche den Querschnitt einer aufgetragenen und ausgegrabenen Erdmasse darstellt. Ziehen wir

11′ parallel zu 20,
22′ „ „ 31′,
33′ „ „ 42′,
4D „ „ A3′,



bis sie die Seite C0 schneiden, so hat man das gegebene Polygon in das äquivalente Viereck ABCD verwandelt, das also die Differenz zwischen der Fläche ABCI4 der aufgetragenen und der Fläche I0123 der ausgegrabenen Masse darstellt, die verschiedene Zeichen besitzen. Der Linienzug ABCD hat mit dem Linienzug ABCI4 oder dem Linienzug I0123 gleiche Zeichen, jenachdem die aufgetragene oder die ausgegrabene Masse grösser ist.**)

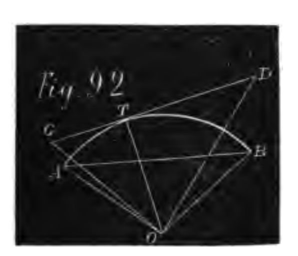
101. Kreisfiguren. — Ein Kreissector (Fig. 91) OAB ist einem Dreieck OAC äquivalent, dessen Scheitel der Punkt O und dessen Basis ein Abschnitt AC der Tangente gleich dem Bogen AB ist. Um (annähernd) den Bogen AB auf der Tangente abzuwickeln, nehme man zunächst einen kleinen Bogen α, der mit einem verschwindend kleinen Fehler durch seine Sehne a ersetzt werden kann. Man trage die Sehne a vom Endpunkte B ausgehend auf dem gegebenen Bogen ab, und wiederhole dies, so oft es möglich ist, bis man auf den Punkt A oder einen sehr nahen Punkt A′ trifft. Dann von A′ ausgehend trägt man dieselbe Anzahl mal die Sehne a auf die Tangente AC ab.***)

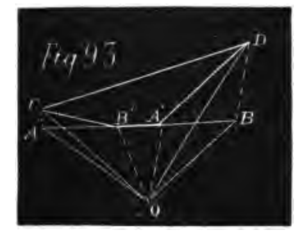


Der Kreissector OAB ist nun dem geradlinigen Dreiecke OAC äquivalent. Das Kreissegment AB (d. h. die Fläche zwischen der Sehne und dem Bogen AB) ist die Differenz der Dreiecke OAC, OAB, und ist also dem überschlagenen Viereck OBAC äquivalent.

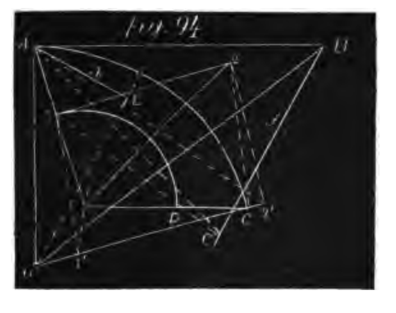
*) CULMANN, *a. a. O.*, S. 28.
**) CULMANN, *a. a. O.*, S. 29.
***) CULMANN, *a. a. O.*, S. 37. In einer Bemerkung am Ende dieses Büchleins sehe man eine Regel von RANKINE, um mit Annäherung die Kreisbogen zu rectificieren, und einen Brief des Prof. SAYNO über denselben Gegenstand.

102. Es ist nicht nothwendig, dass die Tangente, auf welcher man den Bogen abwickelt, durch einen Endpunkt des Bogens gehen muss; sie kann im Gegentheil in einem beliebigen andern Punkte T (Fig. 92) berühren. Dann wickelt man den Bogen AT auf CT und BT auf DT ab. Der Sector OAB verwandelt sich in das Dreieck OCD und das Kreissegment AB ist der Differenz OCD — OAB, d. h. der verschlungenen Figur OCDOBAO gleich, welche als ein Sechseck aufzufassen ist, von welchem zwei Eckpunkte in O vereinigt sind (Fig. 93). Zieht man OB′, OA′ bezüglich parallel zu AC, BC, so sind dadurch die Dreiecke OAC, OBD in die andern B′AC, A′BD transformiert, und das Kreissegment ist dem Viereck A′B′CD äquivalent.





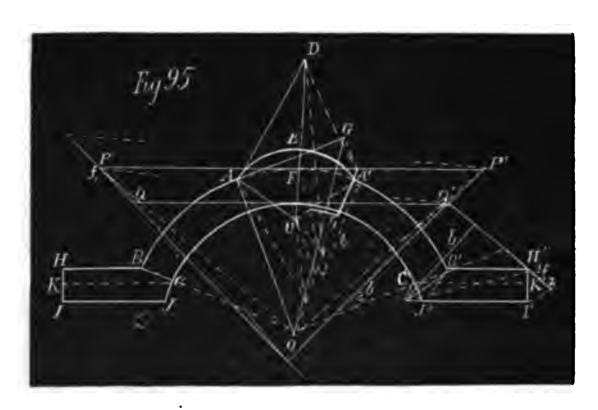
103. *Beispiel.* — Die zu verwandelnde Figur sei das gemischtlinige Viereck ACD3, das zwischen den nicht concentrischen Kreisbogen AC, 3D und den Geraden CD, A3 enthalten ist (Fig. 94). Die Mittelpunkte der beiden Kreise seien 0, 1; die gegebene Figur ist dann gleich dem Sector 0AC minus dem Sector 13D und dem Viereck 0A1C. Indem man die beiden Bogen auf den entsprechenden Anfangstangenten Ab, 32 abwickelt, verwandeln sich die Kreissectoren in die Dreiecke 0AB, 132, und folglich ist die gegebene Figur gleich dem Dreiecke 0AB minus der Fläche 0A321C0, das heisst gleich dem verschlungenen Polygon AB0C123A. Zieht man



11′ parallel zu 2C,
22′ „ „ 31′,
3C′ „ „ A2′,

bis sie die feste Seite 0C schneiden, so verwandelt sich dieses Polygon in das überschlagene Viereck AB0C′. Die Fläche b . f dieses Vierecks findet man dann in gewohnter Weise. Man construiert nämlich über der Diagonale A0 als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete AE = 2b ist; die Länge f ist dann der parallel zur zweiten Kathete gemessene Abstand des Punktes B von der durch C′ gehenden Parallele zu A0.

104. Als anderes Beispiel wollen wir die Fläche der Fig. 95 bestimmen, welche den Durchschnitt eines sogenannten U-förmigen



Eisens darstellt, und die besteht: 1. Aus einer Mondförmigen Fläche AEA′F, begrenzt von zwei Kreisbogen, der eine vom Centrum U, der andere vom Centrum O; 2. Einer Krone CBFB′C′ zwischen zwei concentrischen Kreisbogen BB′, CC vom Centrum O eingeschlossen; und 3. zwei geradlinigen gleichen Theilen*) BCJIH, B′C′J′I′H′ symmetrisch in Bezug auf die Gerade OUFE, welche überhaupt für die ganze Figur Symmetralaxe ist.

Der Mond ist gleich dem Sector UAEA′ plus dem Viereck OAUA′ minus dem Sector OAFA′, d. h. er ist gleich der Summe UAEA′ + OAUA′ + AOA′F. Nach Transformation der genannten Sectoren in die Dreiecke UAD, OAG (wo AD, AG die abgewickelten Bogen AEA′, AFA′ auf den betreffenden Anfangstangenten bedeuten) ist der Mond gleich der Summe UAD + OAUA′ + AOG, oder auch, wenn wir diese drei Linienzüge hintereinander durchlaufen, als ob sie einen Linienzug bildeten, gleich dem Flächeninhalte des Linienzuges ADUA′OAOGA. Dabei kann man dem Theil OA, der zweimal in entgegengesetztem Sinne durchlaufen ist, weglassen (Nr. 22), und folglich ist der Mond dem verschlungenen Sechseck ADUA′OGA äquivalent.

Die Krone betrachtet man als Differenz der Sectoren OBB′, OCC′. Nach Abwickelung der Bogen auf den Mitteltangenten PP′, QQ′ wird die Krone, da die Geraden PQ, P′Q′ durch O gehen, gleich dem Trapez PP′Q′Q, welches die Differenz der beiden Dreiecke OPP′, OQ′Q ist, welche den genannten Sectoren äquivalent sind.

---

*) Wir sagen geradlinig, weil wir die kleinen Bogen CJ, C′J′ durch ihre Sehnen ersetzt denken.

Wenn wir nun das Sechseck ADUA'OG, das Trapez PP'Q'Q und das Fünfeck BCJIH auf die Basis b reducieren und als entsprechende Masse f, f_1, f_2 finden, so ist b $(f + f_1 + f_2)$ der Flächeninhalt der gegebenen Figur.*)

Oder man betrachtet die Figur gegeben als Aggregat von Dreiecken und Trapezen in folgender Weise

UAD + 2OAU — OAG + OPP' — OQQ' + 2BCKH + 2CJIH,

wo CK parallel zu BH, JI gezogen ist. Man betrachtet die Flächen dieser dreieckigen und Trapeztheile als Producte zweier Factoren

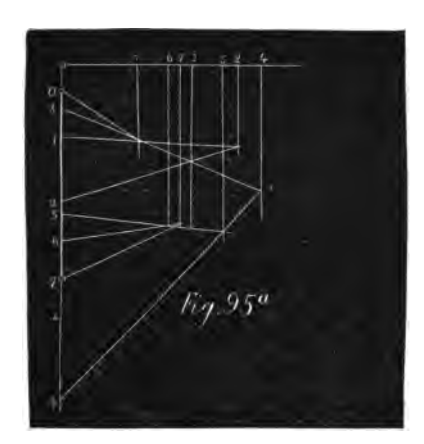

Fig. 95ª


Fig. 95ᵇ


Fig. 96

und reduciert diese Producte auf die Basis b mittelst des Multiplicationspolygons (Fig. 95ª). Es versteht sich von selbst, dass für jede zu subtrahierende Fläche einer der Factoren negativ genommen werden muss.

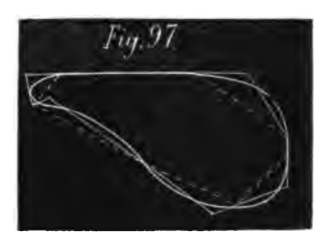
105. Krummlinige Figuren im Allgemeinen*). — Es ist eine bekannte Eigenschaft der Parabel, dass ein parabolisches Segment (Fig. 96) $\frac{4}{3}$ des Dreiecks äquivalent ist, dessen Basis die Sehne der Parabel ist, welche die Grundlinie des Segmentes ist, und dessen Scheitel der Punkt des Bogens ist, wo die Tangente parallel zur Basis wird; das heisst, das Parabelsegment ist einem Dreieck äquivalent, dessen Grundlinie die Sehne, und dessen Höhe gleich $\frac{4}{3}$ der Sagitta ist, wo unter Sagitta der senkrechte Abstand zwischen der Sehne und der der Sehne parallelen Tangente des Bogens verstanden wird.

106. Eine Methode krummlinige Figuren zu transformieren besteht darin, die kleinen Theile des krummlinigen Umfanges als Parabelbogen zu betrachten.

*) In Fig. 95 hat man direct $2f_2$ gefunden, indem man bei Reduction der Figur B'C'J'I'H' b statt 2b verwendete.

**) CULMANN, *a. a. O.*, N. 12.

Wenn eine krumme Linie (Fig. 97) in kleine Bogen getheilt ist, von denen jeder annähernd als Parabelbogen angesehen werden kann, und man die parabolischen Segmente, die zwischen den Bogen und den betreffenden Sehnen enthalten sind, in Dreiecke verwandelt, deren Grundlinien die Sehnen sind, so können die Scheitel dieser Dreiecke willkürlich auf Geraden angenommen werden, welche den Sehnen parallel sind und von denselben Abstände gleich $\frac{4}{3}$ der betreffenden Sagitten haben. Wir wählen die Scheitel so, dass der Scheitel jedes neuen Dreiecks auf der Verlängerung einer Seite des vorhergehenden Dreiecks liegt, d. h., dass die Scheitel zweier aufeinander folgender Dreiecke immer mit dem ihren Grundlinien gemeinsamen Punkte in gerader Linie liegen; dann ist der krummlinige Linienzug in einen geradlinigen äquivalenten verwandelt, der von soviel Seiten gebildet wird, als der gegebene Linienzug in Segmente getheilt ist. Der geradlinige Linienzug oder das Polygon wird dann von neuem in ein Viereck verwandelt, und dann auf die gegebene Basis in der schon auseinandergesetzten Weise reduciert.


Fig. 97

107. *Beispiel.* Man will (Fig. 98) der unregelmässigen Grenzlinie AB zwischen zwei Landgütern eine gebrochene Linie zweier geradliniger Strecken substituieren, deren Endpunkte A, B sind.

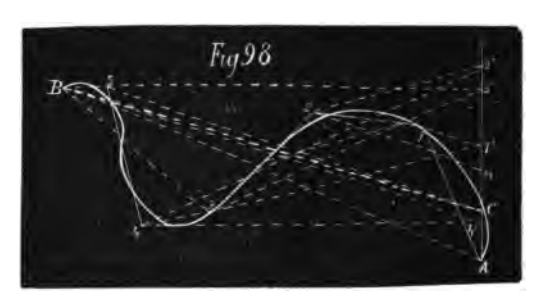


Fig 98

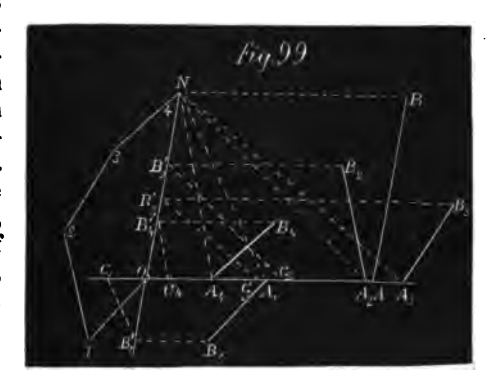
Man betrachte den durch die Curve AB und die Gerade BA gebildeten Linienzug und verwandele ihn in ein Dreieck mit der Basis BA. Zu dem Ende theile man die Curve AB in kleine Bogen; man ziehe die Sehnen und substituiere den so gebildeten Segmenten nach der oben auseinandergesetzten Methode Dreiecke; in dieser Weise ist der vorgelegte Linienzug in das geradlinige Polygon A012345B verwandelt. Zieht man dann

11′ parallel zu 20,
22′ „ „ 31′,

33′ parallel zu 42′,
44′ " " 53′,
5C " " B4′,

bis sie die feste Seite A0 schneiden, so ist dies Polygon in das Dreieck ACB transformiert, und folglich sind der irregulären gegebenen Linie die beiden geradlinigen Strecken AC, CB substituiert. Den Punkt C könnte man beliebig auf einer zu AB Parallelen verrücken, da hierdurch der Flächeninhalt ABC nicht verändert wird.

108. Die Reduction der Flächen auf eine gegebene Basis liefert eine andere Construction der Resultante mehrerer nach Grösse, Sinn und Lage gegebener Segmente A_1B_1, A_2B_2, ... (Fig. 99). Man nehme einen Punkt O als Anfangspunkt eines polygonalen Linienzuges, dessen Seiten der Reihe nach den gegebenen Segmenten äquipollent sind; der Endpunkt des Polygons sei N. Man transformiere nun die Dreiecke OA_1B_1, OA_2B_2, ..., indem man sie auf die Basis ON reduciert, speciell transformiere man sie so, dass ein Scheitel in O liegt, und die Gegenseite ON äquipollent ist.



Dann wird auch die Summe $OA_1B_1 + OA_2B_2 + \ldots$ in ein Dreieck OAB transformiert sein, wo AB zu ON äquipollent ist; das Segment AB ist die gesuchte Resultante (Nr. 43).

Um die Transformation auszuführen, die wir eben angegeben haben, ist es am besten, die Anfangspunkte A_1, A_2, ... der Segmente mit O in gerader Linie anzunehmen. Indem man nun die Punkte B_1, B_2, ... in den Punkten B'_1, B'_2, ... auf ON projiciert durch zu OA_1A_2 .... parallele Strahlen, so verwandeln sich die Dreiecke OA_1B_1, OA_2B_2 .... in $OA_1B'_1$, $OA_2B'_2$, ... Dann suche man die Geraden B'_1C, B'_2C_2, ... der Reihe nach parallel zu NA_1, NA_2, ..., und es seien C_1, C_2, ... die Punkte, in denen sie die Gerade OA_1A_2 ... schneiden. Daraus erhält man die Dreiecke OC_1N, OC_2N, ... bezüglich äquivalent zu $OA_1B'_1$, $OA_2B'_2$, ... Nimmt man also auf OA_1A_2 ... das Segment $OA = OC_1 + OC_2 + \ldots$, und zieht durch A die Gerade AB äquipollent zu ON, so ist $OAB = OA_1B_1 + OA_2B_2 + \ldots$

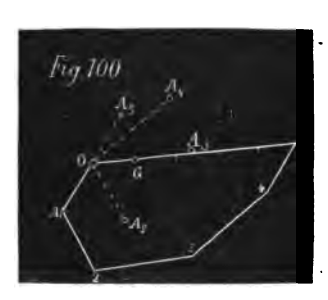
VIII. SCHWERPUNKTE.

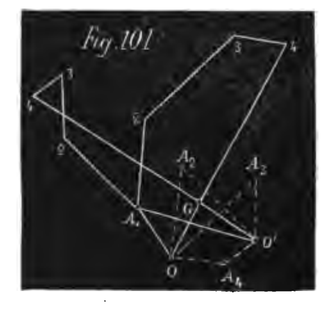
109. In den Sätzen der Nr. 40 und 41 lasse man sämmtliche Punkte $B_1, B_2, \ldots, B_n$ in einen einzigen Punkt G zusammenfallen; dann gehen dieselben in folgende über:

Sind $A_1G, A_2G, A_3G, \ldots, A_nG$ n Segmente, deren Resultante verschwindet, so ist, wenn O ein beliebiger Punkt der Ebene ist, die Resultante der Segmente $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$ gleich (äquipollent) dem n-fachen Segmente OG (Fig. 100).

Umgekehrt:

Gegeben sind n Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Ist die Resultante der Geraden $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$, welche einen Pol O mit den gegebenen Punkten verbinden, gleich dem n-fachen der Geraden OG, welche O mit G verbindet, so besteht dieselbe Eigenschaft für jeden beliebigen andern Pol O′, d. h., die Resultante der Geraden $O'A_1, O'A_2, \ldots, O'A_n$ ist gleich dem n-fachen Segmente OG′, und die Resultante der Geraden $GA_1, GA_2, \ldots, GA_n$ ist gleich Null*).





110. Der Punkt G heisst der Schwerpunkt der Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Sind (Fig. 101, wo $n = 4$) die Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ gegeben, so construiert man ihren Schwerpunkt G in folgender Weise. Nach Wahl eines beliebigen Poles O construiere man einen Linienzug $OA_123 \ldots n$, dessen Anfangspunkt O, und dessen aufeinanderfolgende Seiten den Segmenten $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$ äquipollent sind. Die Gerade On, welche den Linienzug schliesst, geht durch den Punkt G, und OG ist gleich $\frac{On}{n}$. Statt

*) GRASSMANN, *a. a. O.*, S. 141. — CHELINI, *Sui centri de' sistemi geometrici* (Raccolta scientifica, Roma, marzo 1849), § 1.

On in n gleiche Theile zu theilen, um dadurch G zu erhalten, kann man auch einen zweiten Linienzug construieren, der von einem andern Pole G′ ausgeht; die Gerade, welche diesen neuen Linienzug schliesst, schneidet On im gesuchten Punkte G.

111. Das System der n gegebenen Punkte kann keinen weitern Schwerpunkt G′ besitzen. Denn wenn ausser der Resultante von $GA_1, GA_2, \ldots, GA_n$ auch noch die Resultante von $G'A_1, G'A_2, \ldots, G'A_n$ verschwinden sollte, so müsste auch die allgemeine Resultante sämmtlicher Segmente $GA_1, A_1G', GA_2, A_2G', \ldots, GA_n, A_nG'$ verschwinden. Setzt man aber die beiden Segmente GA_r, A_rG' zusammen, so erhält man das Segment GG′; es muss also GG′ gleich Null sein, d. h., G′ muss mit G zusammenfallen.

112. Nehmen wir auch für den Satz in Nr. 42 die Punkte $B_1, B_2, \ldots, B_n$ als in einen Punkt G zusammenfallend an, so geht derselbe über in:

Ist G der Schwerpunkt der Punkte 1, 2, 3, ..., n, und projiciert man sämmtliche Punkte auf eine Gerade mittelst paralleler Strahlen in den Punkten G′, 1′, 2′, 3′, ..., n′, so ist die Summe der Geraden 11′, 22′, 33′, ..., nn′ gleich der n-fachen Geraden GG′ (Fig. 102).



In Folge dieses Satzes wird der Punkt G, da rr′ der (schiefe) Abstand des Punktes r von der Geraden ist, auf die man projicierte, auch Centrum der mittlern Abstände der gegebenen Punkte 1, 2, 3, ..., n genannt.*)

113. Statt in den Sätzen in Nr. 40, 41 anzunehmen, dass sämmtliche Punkte $B_1, B_2, \ldots B_n$ in einen einzigen G zusammenfallen, wollen wir jetzt voraussetzen, dass einige von ihnen $B_1, B_2, \ldots, B_i$ von den übrigen verschieden seien, welche in den einzigen G zusammenfallen, so dass die Resultante der Segmente $A_1B_1, A_2B_2, \ldots A_iB_i, A_{i+1}G, \ldots, A_nG$ gleich Null, und, was auch O für ein Punkt ist, die Resultante von $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$ gleich der Resultante von $OB_1, OB_2, \ldots, OB_i \,.\, (n-i) \,.\, OG$ ist. Die erste Gleichung ändert sich nicht, wenn wir für das Segment A_rB_r die beiden andern A_rG, GB_r oder $A_rG, -B_rG$ setzen; auch die zweite Gleichung besteht weiter, wenn wir beiden Resultanten die Segmente $B_1O, B_2O, \ldots, B_iO$ hinzufügen, so dass also daraus die Gleichung zwischen der Resultante von $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n, B_1O, B_2O, \ldots, B_iO$ und der Resultante von $OB_1, OB_2, \ldots, OB_i, B_1O, B_2O, \ldots, B_iO, (n-i) \,.\, OG$ folgt, d. h., zwischen der Resultante von $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n, -OB_1, -OB_2, \ldots, -OB_i$ und $(n-i) \,.\, OG$. Also erhalten wir:

*) Carnot, *Corrélation des figures de géométrie* (Paris, 1801), no. 209.

Wenn die Resultante der Segmente $A_1G, A_2G, \ldots, A_nG, -B_1G, -B_2G, \ldots, -B_iG$ verschwindet, so ist für jeden beliebigen Punkt O die Resultante der Segmente $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n, -OB_1, -OB_2, \ldots, -OB_i$ gleich $(n-i).OG$; und besteht umgekehrt für einen Pol O diese Gleichung, so besteht sie auch für jeden andern Pol O′, und die Resultante der Segmente $A_1G, A_2G, \ldots, A_nG, -B_1G, -B_2G, \ldots, -B_iG$ ist gleich Null.

114. Wir nehmen jetzt an, dass einige der n Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ in einen Punkt zusammenfallen, andere ebenso in einem zweiten Punkt, u. s. w.; und dass auch die Punkte $B_1, B_2, \ldots, B_i$ sich gruppenweise vereinigen und zusammenfallen. Bezeichnen wir nun durch $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ ganze positive oder negative Zahlen, deren Summe m ist, so lässt sich der vorhergehende Satz aussprechen, wie folgt:

Sind die Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots$ und der Punkt G so beschaffen, dass die Resultante der Segmente $\alpha_1 . A_1G, \alpha_2 . A_2G, \alpha_3 . A_3G, \ldots$ verschwindet, so ist für jeden beliebigen Pol O auch $m . OG$ gleich der Resultante der Segmente $\alpha_1 . OA_1, \alpha_2 . OA_2, \alpha_3 . OA_3 \ldots$;

und umgekehrt:

Besteht für einen Pol O die Eigenschaft, dass $m . OG$ gleich der Resultante von $\alpha_1 . OA_1, \alpha_2 . OA_2, \alpha_3 . OA_3, \ldots$ ist, so besteht dieselbe Eigenschaft auch für jeden andern Pol O′, d. h., die Resultante der Segmente $\alpha_1 . O'A_1, \alpha_2 . O'A_2, \alpha_3 . O'A_3, \ldots$ ist gleich $m . O'G$; und die Resultante der Segmente $\alpha_1 . GA_1, \alpha_2 . GA_2, \alpha_3 . GA_3, \ldots$ ist gleich Null.

115. Der Punkt G heisst Schwerpunkt der mit den Coefficienten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ behafteten Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots$. Kürze halber werden wir sagen, G sei der Schwerpunkt der Punkte $\alpha_1 . A_1, \alpha_2 . A_2, \alpha_3 . A_3, \ldots$, indem wir vor jeden Punkt den ihm zugehörigen Coefficienten schreiben.

116. Aus dem Satze in Nr. 42 erhält man ferner:

Ist G der Schwerpunkt der Punkte $\alpha_1 . A_1, \alpha_2 . A_2, \alpha_3 . A_3, \ldots$ und die Punkte $G, A_1, A_2, A_3, \ldots$ werden mittelst paralleler Strahlen auf eine Gerade in $G', A'_1, A'_2, A'_3, \ldots$ projiciert, so ist die Summe der Geraden $\alpha_1 . A_1A'_1, \alpha_2 . A_2A'_2, \alpha_3 . A_3A'_3, \ldots$ gleich $m . GG'$, wo $m = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots$ ist.

Dieser Eigenschaft halber heisst G auch **das Centrum der mittlern Abstände der Punkte** $\alpha_1 . A_1, \alpha_2 . A_2, \alpha_3 . A_3, \ldots$*)

117. Bis jetzt waren die Coefficienten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ der Punkte $A_1, A_2, A_3 \ldots$ **ganze** positive und negative Zahlen; wir wollen jetzt den Begriff von **Schwerpunkt** auf den Fall ausdehnen, dass die $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ **ganz beliebige** Zahlen sind, oder vielmehr parallele Segmente, die beliebig gegebenen Grössen proportional sind.

Es seien also die Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots$ gegeben, behaftet mit den Zahlen oder parallelen Segmenten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$. Auf eine Gerade p' projiciere man mittelst zu einer beliebig fixierten Richtung paralleler Strahlen die gegebenen Punkte in $A'_1, A'_2, A'_3, \ldots$; und mittelst Strahlen, die einer andern ebenfalls willkürlichen Richtung parallel sind, projiciere man die nämlichen Punkte als $A''_1, A''_2, A''_3, \ldots$ auf eine zweite Gerade p'', die nicht zu p'' parallel ist. Nun bestimme man eine zu p' parallele Gerade r', deren Abstand von p' parallel zu den Strahlen $A_1A'_1, A_2A'_2, A_3A'_3, \ldots$ genommen gleich ist

$$\frac{\alpha_1 . A_1A'_1 + \alpha_2 . A_2A'_2 + \alpha_3 . A_3A'_3 + \ldots}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \ldots};$$

ebenso bestimme man eine Gerade r'' parallel zu p'', deren Abstand von p'', parallel zu den Strahlen $A_1A''_1, A_2A''_2, \ldots$ gemessen, gleich sei

$$\frac{\alpha_1 . A_1A''_1 + \alpha_2 . A_2A''_2 + \alpha_3 . A_3A''_3 + \ldots}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots}.$$

Bezeichnet man den Durchschnittspunkt der Geraden r', r'' durch G, und durch G', G'' die Projectionen von G auf die Geraden p', p'', respective parallel zu AA', AA'' genommen, so wird man folglich haben:

$$\alpha_1 . A_1A'_1 + \alpha_2 . A_2A'_2 + \alpha_3 . A_3A'_3 + \ldots = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots) . GG',$$
$$\alpha_1 . A_1A''_1 + \alpha_2 . A_2A''_2 + \alpha_3 . A_3A''_3 + \ldots = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots) . GG''.$$

Es sei jetzt p''' eine dritte beliebig gegebene Gerade, und man projiciere auf dieselbe in $A'''_1, A'''_2, A'''_3, \ldots, G'''$ die gegebenen Punkte und den Punkt G durch Strahlen, welche einer neuen Richtung parallel sind. Zwischen den drei Projectionsstrahlen desselben Punktes A_1 oder A_2 oder A_3, besteht (Nr. 16) eine lineare Relation mit constanten Coefficienten, das heisst, es ist

$$k' . A_1A'_1 + k'' . A_1A''_1 + k''' . A_1A'''_1 = k,$$
$$k' . A_2A'_2 + k'' . A_2A''_2 + k''' . A_2A'''_2 = k,$$
$$k' . A_3A'_3 + k'' . A_3A''_3 + k''' . A_3A'''_3 = k,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$k' . GG' + k'' . GG'' + k''' . GG''' = k.$$

*) L'Huilier, *Elémens d'analyse géométrique et d'analyse algébrique etc.* (Paris, 1809), § 2.

Man multipliciere diese Gleichungen der Reihe nach mit α_1, $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots)$, und summiere die Producte; dann erhält man, wenn man auf die schon entwickelten Gleichungen Rücksicht nimmt,

$$k''' . \{ \alpha_1 . A_1A_1''' + \alpha_2 . A_2A_2''' + \alpha_3 . A_3A_3''' + \ldots \\ - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots) . GG''' \} = 0,$$

oder auch

$$\alpha_1 . A_1A_1''' + \alpha_2 . A_2A_2''' + \alpha_3 . A_3A_3''' + \ldots \\ = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots) . GG'''.$$

Das heisst:

Wenn man die Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots$, G auf eine beliebige Gerade mittelst Strahlen, die einer willkürlichen Richtung parallel sind, projiciert, so ist das Product des Projectionsstrahles von G mal $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots$ gleich der Summe der Projectionsstrahlen von $A_1, A_2, A_3, \ldots$ bezüglich mal $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$.

Den so definierten Punkt G nennt man **Schwerpunkt** der Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots$, die mit den Zahlen oder Segmenten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ behaftet sind.

Der Schwerpunkt verändert sich nicht, wenn man für die Coëfficienten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ andere ihnen proportionale substituiert, denn dadurch ändern sich die Verhältnisse von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ zu $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots$ nicht.

118. Wenn die Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots$ und G in den Punkten $A_1', A_2', A_3', \ldots, G'$ auf eine Gerade p′ mittelst Strahlen projiciert werden, welche einer andern Geraden p″ parallel sind, so hat man, wenn man durch O′ einen beliebigen Punkt von p′ bezeichnet:

$$\alpha_1 . O'A_1' + \alpha_2 . O'A_2' + \alpha_3 . O'A_3' + \ldots \\ = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots) O'G'.$$

Lässt man nämlich durch O′ eine Gerade p″ gehen und projiciert auf diese die Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots$, G in den Punkten A_1'', $A_2'', A_3'', \ldots, G''$ mit Strahlen, welche zu p′ parallel sind, so hat man identisch

$$A_1A_1'' = A_1'O', A_2A_2'' = A_2'O', A_3A_3'' = A_3'O', \ldots, GG'' = G'O';$$

nach dem vorhergehenden Theorem hat man aber

$$\alpha_1 . A_1A_1'' + \alpha_2 . A_2A_2'' + \alpha_3 . A_3A_3'' + \ldots \\ = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots) . GG'',$$

folglich u. s. w.

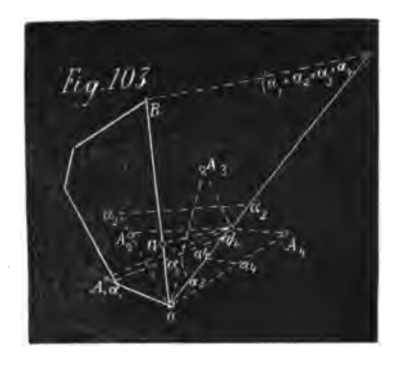
119. Ist O ein willkürlicher Punkt, so ist die Resultante der Segmente $\alpha_1 . OA_1, \alpha_2 . OA_2, \alpha_3 . OA_3, \ldots$ gleich $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots) . OG$.

Unter dem Segment $\alpha . OA$ verstehen wir ein zu OA paralleles Segment, das im Sinne von OA oder in entgegengesetztem Sinne gerichtet ist, jenachdem α positiv oder negativ ist, und dessen Grösse OA mit dem Verhältniss $\alpha : 1$ multipliciert ist. — Durch den Punkt O ziehe man eine Gerade p′ und projiciere auf sie die Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots$, G in den Punkten $A_1', A_2', A_3', \ldots$, G′ mittelst paralleler Strahlen. Dann ist das Segment OA die Resultante der Segmente OA′, A′A, und verlängert man diese Segmente im Verhältniss $\alpha : 1$, so ist $\alpha . OA$ die Resultante von $\alpha . OA'$, $\alpha . A'A$. Daraus folgt, dass man die Resultante von $\alpha . OA_1$, $\alpha_2 . OA_2$, $\alpha_3 . OA_3, \ldots$ erhält, indem man alle Segmente $\alpha_1 . OA_1'$, $\alpha_2 . OA_2'$, $\alpha_3 . OA_3', \ldots$ und die Segmente $\alpha_1 . A_1'A_1$, $\alpha_2 . A_2'A_2$, $\alpha_3 . A_3'A_3, \ldots$ zusammensetzt. Die Resultante (d. h. die Summe) von $\alpha_1 . OA_1'$, $\alpha_2 . OA_2'$, $\alpha_3 . OA_3' \ldots$ ist aber $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots) . OG'$, und die Resultante (oder die Summe) von $\alpha_1 . A_1'A_1$, $\alpha_2 . A_2'A_2$, $\alpha_3 . A_3'A_3, \ldots$ ist $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots) . G'G$; folglich kann man die Resultante der Segmente $\alpha_1 . OA_1$, $\alpha_2 . OA_2$, $\alpha_3 . OA_3, \ldots$ durch Zusammensetzung der zwei Segmente $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \ldots) . OG'$, $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots) . G'G$ erhalten, sie fällt also mit dem Segmente

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots) . OG$$

zusammen.

120. Daraus folgt, dass, um den Punkt G der gegebenen Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots$ (Fig. 103) mit den Coefficienten (Zahlen oder parallelen Segmenten) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ zu finden, man von zwei verschiedenen Anfangspunkten O, O′ aus zwei Linienzüge construieren muss; die Seiten des ersten sind äquipollent zu $\alpha_1 . OA_1$, $\alpha_2 . OA_2$, $\alpha_3 . OA_3, \ldots$, die des zweiten zu $\alpha_1 . O'A_1$, $\alpha_2 . O'A_2$, $\alpha_3 . O'A_3, \ldots$ Die Geraden OR, O′R′, welche bezüglich die beiden Linienzüge schliessen, schneiden sich in dem gesuchten Punkte G, und es ist



$$OR = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \ldots) . OG,$$
$$O'R' = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \ldots) . O'G' *).$$

Sind die α Segmente, so sind die Producte $\alpha . OA$ Flächen, die man auf eine gemeinsame Basis h reducieren muss (Nr. 92). Angenommen, man habe $\alpha_1 . OA_1 = h . a_1$, $\alpha_2 . OA_2 = h . a_2$, $\alpha_3 . OA_3 = h . a_3, \ldots$ erhalten, so kann man die Seiten des ersten Linienzuges gleich den Längen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ machen, und, wenn OR die Schlussgerade ist, so ist $h . OR = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots) . OG$.

*) Grassmann, a. a. O., S. 142.

Daraus folgt, dass man, auch ohne einen zweiten Linienzug zu construieren, G findet, wenn man auf der Schlusslinie das Segment

$$OG = \frac{h . OR}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots}$$

bestimmt.

Sind die α Flächen, so beginnt man mit der Reduction derselben auf eine gemeinsame Basis k:

$$\alpha_1 = k . \alpha_1', \alpha_2 = k . \alpha_2', \alpha_3 = k . \alpha_3', \dots;$$

darauf reduciert man die Producte $\alpha_1' . OA_1, \alpha_2' . OA_2, \alpha_3' . OA_3, \dots$ auf die Basis h:

$$\alpha_1' . OA_1 = h . a_1, \alpha_2' . OA_2 = h . a_2, \alpha_3' . OA_3 = h . a_3, \dots,$$

so dass also

$$\alpha_1 . OA_1 = hk . a_1, \alpha_2 . OA_2 = hk . a_2, \alpha_3 . OA_3 = hk . a_3, \dots$$

ist; construiert man dann den Linienzug mit den Seiten a_1, a_2, $a_3, \dots$, so ist

$$OG = \frac{h . k . OR}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots} = \frac{h . OR}{\alpha_1' + \alpha_2' + \alpha_3' + \dots}.$$

121. Ist H der Schwerpunkt der Punkte $\alpha_1 . A_1, \alpha_2 . A_2, \dots$, und K der Schwerpunkt der Punkte $\beta_1 . B_1, \beta_2 . B_2, \dots$, so fällt der Schwerpunkt sämmtlicher gegebener Punkte $\alpha_1 . A_1, \alpha_2 . A_2, \dots, \beta_1 . B_1, \beta_2 . B_2, \dots$ mit dem Schwerpunkt der beiden Punkte m . H, n . K zusammen, wo $m = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots$, $n = \beta_1 + \beta_2 + \dots$ ist.

Denn, setzt man für einen beliebigen Pol O die Gerade m . OH, Resultante der Segmente $\alpha_1 . OA_1, \alpha_2 . OA_2, \dots$, mit der Geraden n . OK, Resultante der Segmente $\beta_1 . OB_1, \beta_2 . OB_2, \dots$ zusammen, so erhält man $(m + n) . OG$, die Resultante der Geraden m . OH, n . OK und zugleich die Resultante sämmtlicher Segmente $\alpha_1 . OA_1, \alpha_2 . OA_2, \dots, \beta_1 . OB_1, \beta_2 . OB_2, \dots$.

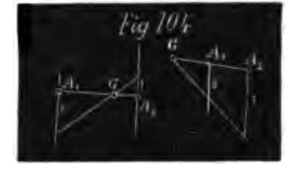
122. Liegen die Punkte $A_1, A_2, A_3, \dots$ in gerader Linie, so liegt ihr Schwerpunkt G in derselben Geraden.

Dies wird klar, wenn man den Pol O auf der Geraden $A_1A_2A_3 \dots$ annimmt; die Segmente $\alpha_1 . OA_1, \alpha_2 . OA_2, \alpha_3 . OA_3, \dots$ fallen dann sämmtlich in diese Gerade, und folglich fällt auch ihre Resultante m . OG in dieselbe Gerade.

Daraus folgt:

Projiciert man $A_1, A_2, \dots, A_n$, G auf eine beliebige Gerade in den Punkten $A_1', A_2', \dots, A_n'$, G', so ist der Punkt G' der Schwerpunkt der Punkte $\alpha_1 . A'_1, \alpha_2 . A'_2, \dots, \alpha_n . A'_n$.

Die Punkte seien nur zwei A_1, A_2 (Fig. 104 a. folg. S., wo die Segmente α_1, α_2 einfach durch die Zahlen 1, 2 bezeichnet sind) mit den Coefficienten α_1, α_2, so ist ihr Schwerpunkt G ein Punkt



der Geraden A_1A_2. Da die Resultante der Geraden $\alpha_1 . GA_1$, $\alpha_2 . GA_2$ gleich Null ist, so hat man

$$\alpha_1 . GA_1 + \alpha_2 . GA_2 = 0$$

oder auch

$$A_1G : GA_2 = \alpha_2 : \alpha_1,$$

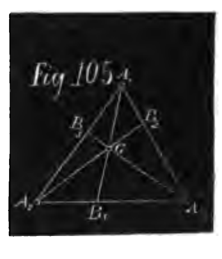
und also

$$A_1G : GA_2 : A_1A_2 = \alpha_2 : \alpha_1 : \alpha_1 + \alpha_2;$$

das heisst, der Punkt G theilt das Segment A_1A_2 in zwei Theile, welche den Zahlen α_1, α_2 umgekehrt proportional sind, und er liegt innerhalb oder ausserhalb des gegebenen Segments, jenachdem α_1, α_2 gleiche oder ungleiche Zeichen besitzen.

Ist $\alpha_1 = \alpha_2$, so ist $A_1G = GA_2$, d. h., G ist dann der Halbierungspunkt von A_1A_2.

Ist $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, so erhält man aus der Proportion $A_1G : A_1A_2 = \alpha_2 : \alpha_1 + \alpha_2$ den Werth $A_1G = \infty$, d. h., G ist dann der unendlich entfernte Punkt der Geraden A_1A_2.



123. Die gegebenen Punkte seien die drei A_1, A_2, A_3 nicht in gerader Linie (Fig. 105); α_1, α_2, α_3 seien ihre Coefficienten, deren Summe nicht gleich Null sei. Der Schwerpunkt der Punkte $\alpha_2 . A_2$, $\alpha_3 . A_3$ ist ein Punkt B_1 der Geraden A_2A_3, und der Schwerpunkt der gegegebenen Punkte $\alpha_1 . A_1$, $\alpha_2 . A_2$, $\alpha_3 . A_3$ ist daher der Schwerpunkt der Punkte $\alpha_1 . A_1$, $(\alpha_2 + \alpha_3) . B_1$, das heisst, der Punkt G der Geraden A_1B_1, welcher durch die Relation bestimmt ist

$$GB_1 : A_1B_1 = \alpha_1 : \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3.$$

Nun sind aber die Dreiecke $A_1A_2A_3$, GA_2A_3 ihren Höhen proportional, also auch den schiefen Abständen A_1B_1, GB_1 der Scheitel von der gemeinsamen Grundlinie A_2A_3; also ist

$$GA_2A_3 : A_1A_2A_3 = \alpha_1 : \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3.$$

In ähnlicher Weise zeigt man, dass

$$GA_3A_1 : A_2A_3A_1 = \alpha_2 : \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,$$
$$GA_1A_2 : A_3A_1A_2 = \alpha_3 : \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

ist, also

$$GA_2A_3 : GA_3A_1 : GA_1A_2 = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3.$$

Das heisst: Der Schwerpunkt G der drei Punkte $\alpha_1 . A_1$, $\alpha_2 . A_2$, $\alpha_3 . A_3$ theilt die Fläche $A_1A_2A_3$ in drei Dreiecke GA_2A_3, GA_3A_1, GA_1A_2, die den Coefficienten α_1, α_2, α_3 proportional sind.

124. Ist G der Schwerpunkt der Punkte $\alpha_1 . A_1$, $\alpha_2 . A_2$, $\alpha_3 . A_3$, ... und O ein beliebiger Punkt, so haben wir gesehen, dass die Resultante OR der Segmente $\alpha_1 . OA_1$, $\alpha_2 . OA_2$, $\alpha_3 . OA_3$, ... durch die Gleichung gegeben ist

$$OR = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots) . OG,$$

daraus folgt

$$OG = \frac{OR}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots}.$$

Ist $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots = 0$, ohne dass OR verschwindet, so ist $OG = \infty$.

Ist $OR = 0$, so ist, wenn man einen andern Pol O' wählt, die Resultante von $\alpha_1 \,.\, O'A_1$, $\alpha_2 \,.\, O'A_2$, $\alpha_3 \,.\, O'A_3, \ldots$ gleich $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots) \,.\, O'G$, das heisst gleich Null, weil man $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots = 0$ hat.

Ist also $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots = 0$, so ist die Resultante OR entweder für alle Punkte O gleich Null, oder sie verschwindet überhaupt für keinen. Im letzteren Falle erhält man einen Schwerpunkt G, der in unendlicher Entfernung auf der Geraden ... OR ... liegt. In demselben Falle sei A_0 der Schwerpunkt von $\alpha_1 \,.\, A_1$, $\alpha_2 \,.\, A_2, \ldots, \alpha_{n-1} \,.\, A_{n-1}$; dann ist für jeden beliebigen Pol O

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1}) \,.\, OA_0,$$

d. h. $-\alpha_n \,.\, OA_0$, die Resultante von $\alpha_1 \,.\, OA_1$, $\alpha_2 \,.\, OA_2, \ldots, \alpha_{n-1} \,.\, OA_{n-1}$ (Nr. 119). Es sei OH die Resultante von $-\alpha_n \,.\, OA_0$ und $\alpha_n \,.\, OA_n$; diese Resultante muss äquipollent sein zu $\alpha_n \,.\, A_0A_n$, das heisst von O unabhängig. Folglich hat man: Die Resultante von $\alpha_1 \,.\, OA_1$, $\alpha_2 \,.\, OA_2, \ldots, \alpha_n \,.\, OA_n$, wo $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n = 0$ ist, hat sowohl constante Richtung als constante Grösse (für jeden beliebigen Pol O) und ist äquipollent zu $\alpha_n \,.\, A_0A_n$, wo A_n ein beliebiger von den gegebenen Punkten, und A_0 der Schwerpunkt der übrigen (mit ihren respectiven Coefficienten behafteten) Punkte ist.

Da im ersten Falle $OG = \frac{0}{0}$ wird, so hat das System der gegebenen Punkte keinen bestimmten Schwerpunkt. Legt man nun den Pol O in einen der gegebenen Punkte, z. B. in A_1, so ist, da für einen beliebigen Pol O die Resultante von $\alpha_1 \,.\, OA_1$, $\alpha_2 \,.\, OA_2$, $\alpha_3 \,.\, OA_3, \ldots$ verschwindet, die Resultante von $\alpha_2 \,.\, A_1A_2$, $\alpha_3 \,.\, A_1A_3, \ldots$ gleich Null, d. h., es ist, da $\alpha_2 + \alpha_3 + \ldots = -\alpha_1$ von Null verschieden ist, A_1 der Schwerpunkt der Punkte A_2, $A_3, \ldots$.

125. Durch die Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots$ und ihren Schwerpunkt G ziehe man unter einander parallele Segmente A_1B_1, A_2B_2, $A_3B_3, \ldots$, GH in beliebig angenommener Richtung proportional den Coefficienten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, m = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots$ unter Berücksichtigung der Zeichen: d. h., nachdem man den positiven Sinn der Segmente festgestellt hat, ziehe man nach dieser Seite die positiven Coefficienten proportionalen Segmente, und nach der andern Seite die negativen Coefficienten proportionalen. Es sei O ein beliebiger Punkt, durch den man eine Gerade parallel zu den Segmenten AB zieht, und auf diese projiciere man durch Parallel-

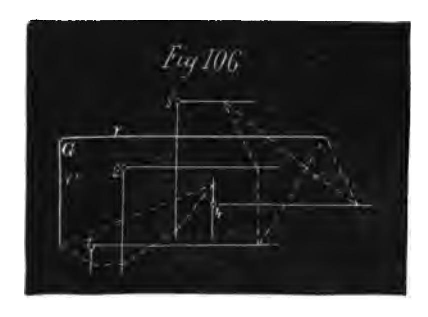
strahlen die Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots, G$ in $A_1', A_2', A_3', \ldots, G'$; dann ist nach dem Satze in Nr. 116

$$\alpha_1 . A_1A_1' + \alpha_2 . A_2A_2' + \alpha_3 . A_3A_3' + \ldots = m . GG'.$$

Die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, m$ sind aber den Grundlinien der Dreiecke OA_1B_1, OA_2B_2, $OA_3B_3, \ldots$, OGH proportional, und die Segmente A_1A_1', A_2A_2', $A_3A_3', \ldots$, GG' den Höhen derselben Dreiecke, folglich der Satz:

> Die Summe der Dreiecke, welche von O aus die Segmente A_1B_1, A_2B_2, $A_3B_3, \ldots$ projicieren, ist gleich dem Dreiecke, welches vom nämlichen Pole O aus die Gerade GH projiciert. Daraus folgt (Nr. 44), dass GH die Resultante der Segmente A_1B_1, A_2B_2, $A_3B_3, \ldots$ ist.

126. Daraus ergiebt sich eine andere Construction des Schwerpunktes G. Nachdem man durch $A_1, A_2, A_3, \ldots$ (Fig. 106) die





Segmente $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ in einer beliebig fixierten Richtung gezogen hat, setze man dieselben in der in Nr. 50 gelehrten Art zusammen. Man erhält auf diese Weise eine Gerade r, der das resultierende Segment angehören, und die daher durch G gehen muss. Nun wiederhole man die Zusammensetzung, indem man nur die gemeinsame Richtung der Segmente $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ ändert; man erhält so eine andere Gerade r', und der Durchschnittspunkt von r und r' ist dann der gesuchte Schwerpunkt.*)

127. Unter Schwerpunkt einer Linie oder einer Fläche versteht man den Schwerpunkt sämmtlicher Punkte der Linie oder Fläche, die alle mit gleichen Coefficienten behaftet sind.

128. Der Schwerpunkt eines geradlinigen Segments AB (Fig. 107) ist sein Halbierungspunkt G. Denn, wenn X ein beliebiger Punkt des Segmentes ist, so giebt es in demselben noch einen



*) CULMANN, *a. a. O.*, S. 144.

andern Punkt X', so dass G der Halbierungspunkt des Segmentes XX' ist; folglich fällt der Schwerpunkt der Punkte X, X' in G. Da nun jedes zu X, X' analoge Punktepaar seinen Schwerpunkt in G hat, so fällt der Schwerpunkt sämmtlicher Punkte von AB mit dem Schwerpunkt ebensovieler Punkte, die sämmtlich im Punkte G vereinigt sind, zusammen; das heisst, G ist der Schwerpunkt des Segmentes AB.

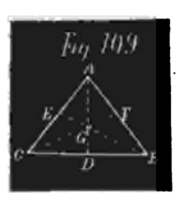


129. Der Schwerpunkt eines Parallelogramms ist der Durchschnittspunkt seiner beiden Diagonalen (Fig. 108). Der Schwerpunkt der Kreisfläche, oder der Kreislinie, oder eines regulären Polygons ist der Mittelpunkt der Figur. Der Beweis ist absolut derselbe, wie der vorhergehende.

***130.** Hat eine Figur eine Symmetralaxe, so liegt in dieser Axe der Schwerpunkt der Figur. Denn ist X ein Punkt der Figur, so existiert immer ein anderer Punkt X' der Figur, so dass das Segment XX' von der Axe halbiert wird und auf derselben senkrecht steht. Der Schwerpunkt der beiden Punkte X, X' liegt daher auf der Axe; und da dieses für sämmtliche analoge Punktepaare gilt, so folgt, dass wir für sämmtliche Punkte der Figur Punkte, die auf der Axe liegen, substituieren können. Der Schwerpunkt derselben liegt aber auf der Geraden, in welcher sie sich befinden, folglich u. s. w.

Eine ähnliche Betrachtung zeigt, dass in einer Figur, welche einen Durchmesser hat, d. h. eine Gerade besitzt, welche (unter rechten oder schiefen Winkeln) sämmtliche einer bestimmten Richtung parallele Sehnen halbiert, der Schwerpunkt der Figur auf dem Durchmesser liegt.

Hat eine Figur zwei Durchmesser, so ist ihr Durchschnittspunkt der Schwerpunkt.



131. Die Figur sei ein Dreieck ABC (Fig. 109). Ist dann D der Halbierungspunkt von BC, so ist die Gerade AD ein Durchmesser, da er sämmtliche Sehnen, die parallel zu BC laufen, halbiert. Der Schwerpunkt G des Dreiecks ist daher der Durchschnittspunkt der drei Durchmesser AD, BE, CF. Er theilt jeden der drei Durchmesser in zwei Segmente, die sich wie 2 : 1 verhalten. Denn, da das Dreieck ABD von der Transversale FGC geschnitten wird, so ist

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BC}{CD} \cdot \frac{DG}{GA} = -1.$$

Es ist aber AF = FB, BC = 2DC, und folglich

$$\frac{DG}{GA} = \frac{1}{2},$$

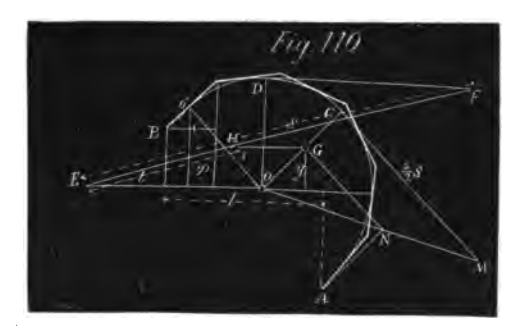
oder auch $GD = \frac{1}{3} AD$, und analoger Weise $GE = \frac{1}{3} BE$, $GF = \frac{1}{3} CF$.

Der Punkt G ist auch der Schwerpunkt der drei Punkte A, B, C.

132. Wenn eine (Linien- oder Flächen-) Figur aus einem System von geradlinigen Segmenten oder Dreiecksflächen besteht, so ist ihr Schwerpunkt derjenige der Punkte $\alpha_1 . A_1$, $\alpha_2 . A_2$, $\alpha_3 . A_3, \ldots$, wo $A_1, A_2, A_3, \ldots$ die Schwerpunkte der Segmente oder Dreiecke sind, aus denen die Figur zusammengesetzt ist, und die (Zahlen- oder segmentarischen) Coefficienten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ den Segmenten oder Dreiecken selbst proportional sind.

133. Die Figur sei ein Linienzug mit geradlinigen Seiten. Es seien $A_1, A_2, A_3, \ldots$ die Halbierungspunkte der Seiten, und α_1, $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$ Segmente, welche den Seiten proportional sind. Man suche nach einer der schon gegebenen Arten (Nr. 120, 126) den Schwerpunkt G der Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots$, die mit den Segmenten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ behaftet sind; dann ist G der Schwerpunkt des gegebenen Linienzuges.

134. Ist der Linienzug ein Theil des Umfanges eines regulären Polygons (Fig. 110), so kann man den Schwerpunkt in viel



einfacherer Weise bestimmen. Nachdem man einen Durchmesser des eingeschriebenen Kreises gezogen, projiciere man auf denselben die Seiten des Linienzuges orthogonal. Sei σ eine Seite, λ ihre Projection, r der Radius des Kreises, welcher nach dem Halbierungspunkt von σ gezogen ist, und p das Perpendikel, das von letzterem Punkte auf den Durchmesser gefällt ist; dann ist das rechtwinklige Dreieck mit σ als Hypotenuse und λ als Kathete dem Dreieck ähnlich, dessen Hypotenuse r und dessen Kathete p ist.

Folglich hat man

$$\frac{\lambda}{p} = \frac{\sigma}{r} \text{ oder } \lambda r = p\sigma.$$

Wir schreiben die analogen Gleichungen für sämmtliche Seiten des Linienzuges auf, und summieren die entsprechenden Glieder, das liefert

$$rl = p_1\sigma_1 + p_2\sigma_2 + \ldots,$$

wo l die Projection des gesammten Linienzuges sein soll.

Es sei G der Schwerpunkt, y die Senkrechte, welche von G auf den Durchmesser gefällt ist. Da G der Schwerpunkt der Halbierungspunkte der Seiten ist, die bezüglich mit den Coefficienten $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ behaftet sind, so erhält man

$$p_1\sigma_1 + p_2\sigma_2 + \ldots = ys,$$

wo s die Länge des Linienzuges bedeutet. Also ist

$$rl = ys, \text{ d. h., } y = \frac{rl}{s}.$$

Diese Gleichung giebt den Abstand des Punktes G von dem Durchmesser; er muss überdiess noch auf dem Radius OC des Kreises sich befinden, welcher den Linienzug halbiert, da dieser Radius eine Symmetralaxe für den Linienzug ist. Man ziehe eine Gerade EF = s, deren einer Endpunkt E auf dem Durchmesser, und dessen anderer Endpunkt F auf der Tangente des Kreises liegt, welche parallel zu diesem Durchmesser ist; dann nehme man auf EF ein Segment EH = l, und ziehe durch H die zu DF Parallele, bis sie die Symmetralaxe OC in G schneidet; dann erhalten wir, da die Gerade EF durch die Parallelen EO, HG, DF geschnitten wird:

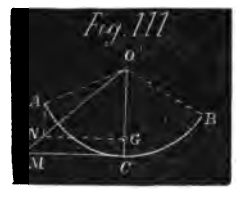
$$\frac{EF}{EH} = \frac{\text{Abstand von EO, DF}}{\text{Abstand von EO, HG}},$$

$$\text{oder } \frac{s}{l} = \frac{r}{\text{Abstand von G und EO}} = \frac{r}{y},$$

folglich ist G der gesuchte Schwerpunkt. Man beachte in der oben erhaltenen Formel wohl, dass l die Projection der gebrochenen Linie auf einen beliebig gewählten Durchmesser, und y der senkrechte Abstand des Punktes G von dem nämlichen Durchmesser ist. *Andere Construction:* Auf der Tangente CM, die senkrecht auf der Symmetralaxe OC steht, schneide man ein Segment $CM = \frac{1}{2}s$ ab, verbinde O mit M, und ziehe von dem Endpunkte A des gegebenen Linienzuges, welcher mit M auf derselben Seite der Symmetralaxe liegt, die Parallele zu OC, bis sie OM in N schneidet; durch N ziehe man dann die Parallele zu CM, die OC in G schneidet. In den ähnlichen Dreiecken OCM, OGN sind die Grundlinien näm-

lich $\frac{1}{2}$s, $\frac{1}{2}$l, unter l die Projection der gebrochenen Linie auf den zu OC senkrechten Durchmesser verstanden. Die Höhe des ersten ist r, also ist die Höhe des zweiten gleich dem Abstande G vom Mittelpunkte O.*)

135. Diese Construction ist auch auf den Fall anwendbar, wenn das reguläre Polygon, dessen Umfang der gegebene Linienzug angehört, unendlich viele Seiten hat, das heisst, mit dem Kreise zusammenfällt. Die gegebene Linie sei also ein Kreisbogen AB mit dem Mittelpunkte O (Fig. 111); s sei die Länge des Bogens, deren Hälfte als CM auf der mittleren Tangente abgewickelt sei. Projiciert man den Endpunkt A als N auf OM mittelst einer Parallele zur Symmetralaxe OC, und zieht durch N die Parallele zu MC, bis sie OC in G trifft, so ist G der Schwerpunkt des Bogens AB. Denn man hat



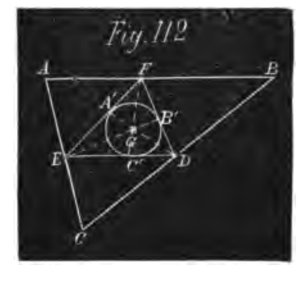
$$CM : CO = GN : GO,$$

$$CM = \frac{1}{2}s, \quad GN = \frac{1}{2}l, \quad CO = r,$$

also

$$GO = y.**)$$

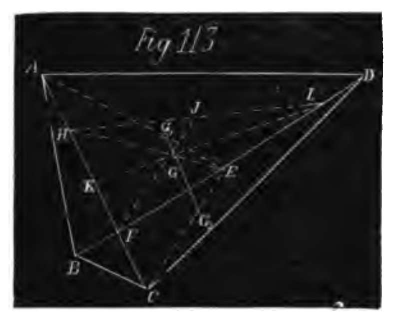
136. Wenn der gegebene Linienzug der Umfang eines Dreiecks ABC (Fig. 112) ist, so ist der Schwerpunkt G der Mittelpunkt des in das Dreieck DEF eingeschriebenen Kreises, dessen Scheitel die Halbierungspunkte der Seiten des gegebenen Dreiecks sind. Denn D, E, F sind die Schwerpunkte der geradlinigen Segmente BC, CA, AB; folglich ist G der Schwerpunkt der Punkte α . D, β . E, γ . F, wo $\alpha : \beta : \gamma = BC : CA : AB$ ist. Der Schwerpunkt A′ der Punkte β . E, γ . F theilt das Segment EF in zwei Segmente EA′, A′F, so dass sich verhält EA′ : A′F $= \gamma : \beta = AB : CA = \frac{1}{2}AB : \frac{1}{2}CA = ED : DF$. Also ist DA′ die Halbierungslinie des Winkels EDF, und folglich liegt G, welches der Schwerpunkt der Punkte α . D, $(\beta + \gamma)$. A′ sein muss, auf der (innern) Halbierungslinie des Winkels D des Dreiecks DEF. Entsprechend muss G auch auf den Halbierungslinien EB′, FC′ der



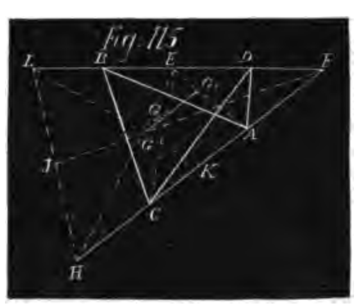
*) Culmann, *a. a. O.*, S. 147.
**) Culmann, *a. a. O.*, S. 148.

andern beiden Winkel liegen, also ist G das Centrum des in das Dreieck DEF beschriebenen Kreises, w. z. b. w.

173. Die gegebene Figur sei das Viereck ABCD (Fig. 113, 114, 115), das man als die algebraische Summe der beiden Dreiecke ABD, CDB ansehen kann, in die es durch die Diagonale







BD getheilt wird. Es sei E der Halbierungspunkt von BD. Die Schwerpunkte G_1, G_2 der beiden Dreiecke liegen dann bezüglich auf den Geraden AE, CE, so dass $G_1E = \frac{1}{3}AE$, $G_2E = \frac{1}{3}CE$ ist. Folglich ist der Schwerpunkt G des Vierecks der Schwerpunkt der beiden Punkte $\alpha_1 . G_1$, $\alpha_2 . G_2$, wo $\alpha_1 : \alpha_2 = ABD : CBD = AF : FC$, unter F den Durchschnittspunkt der beiden Diagonalen BD, AC verstanden. Da G_1G_2 zwei Seiten des Dreiecks AEC in proportionierte Stücke theilt, so ist sie der dritten Seite AC parallel; daraus folgt, dass die Gerade EG die G_1G_2 und die AC in demselben Verhältniss, nämlich $G_1G : GG_2 = \alpha_2 : \alpha_1 = FC : AF$, theilt. Um AC im Verhältniss FC : AF zu theilen, genügt es, die Segmente AF, FC unter sich zu vertauschen, das heisst AH = FC zu machen, woraus HC = AF folgt. Die Verbindungslinie EH trifft dann G_1G_2 im gesuchten Punkte G.

Die Parallelen G_1G_2 und AC theilen die Segmente EA, EC,

EH in proportionierte Stücke; da nun $G_1E = \frac{1}{3}AE$ und $G_2E = \frac{1}{3}CE$ ist, so muss auch $GE = \frac{1}{3}HE$ sein.

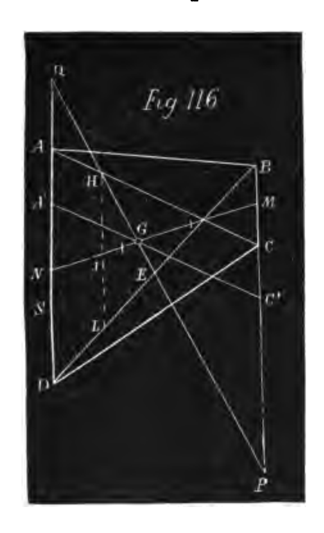
Benutzt man jetzt statt BD die Diagonale AC, deren Halbierungspunkt K sei, so liegt, wenn man auf BD den Wechsel der Segmente BF, FD gemacht hat (d. h., wenn man BL = FD nimmt, wodurch LD = BF wird), der Punkt G auch auf LK und zwar so, dass $GK = \frac{1}{3}LK$.

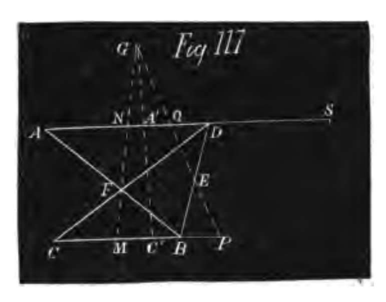
Der Mittelpunkt E von BD ist aber auch der Mittelpunkt von FL, und ebenso ist K der Halbierungspunkt von FH; also ist G der Schwerpunkt des Dreiecks FLH, d. h.:

Der Schwerpunkt eines Vierecks fällt mit dem Schwerpunkt des Dreiecks zusammen, dessen Scheitel der Durchschnittspunkt der Diagonalen und die beiden Punkte sind, welche durch die Vertauschung der Abschnitte auf jeder der beiden Diagonalen entstehen.

Daraus folgt, dass die Gerade FG durch den Halbierungspunkt J von HL geht.*)

138. Sind AD, BC parallel (Fig. 116, 117), und man zieht durch die Schwerpunkte der Dreiecke BCD, ABD die Parallelen





*) CULMANN, *a. a. O.*, S. 152. — Man vergl. *Quarterly Journal of Mathematics*, vol. 6 (London, 1864), p. 127.

zu AD, so theilen diese die Gerade MN, welche die Halbierungspunkte von AD, BC verbindet, in drei gleiche Segmente. Da die Gerade MN die Halbierungspunkte aller zu AD paralleler Sehnen enthält, also ein Durchmesser der Figur ist, so muss der Schwerpunkt G in ihr liegen, und er wird das mittlere Segment derselben in zwei den Flächen genannter Dreiecke proportionale Stücke theilen, also proportional zu den Grundlinien BC, AD. Die Theile des mittleren Segmentes, deren Summe gleich $\frac{1}{3}MN$, und deren Verhältniss AD : BC ist, sind also bezüglich gleich

$$\frac{MN . AD}{3\,(AD + BC)},\ \frac{MN . BC}{3\,(AD + BC)},$$

und folglich ist

$$MG = \frac{1}{3}MN + \frac{MN . AD}{3\,(AD + BC)} = \frac{MN\,(BC + 2AD)}{3\,(AD + BC)},$$

$$GN = \frac{1}{3}MN + \frac{MN + BC}{3\,(AD + BC)} = \frac{MN\,(AD + 2BC)}{3\,(AD + BC)};$$

also verhält sich $MG : GN = BC + 2AD : AD + 2BC$. Jede Gerade also, welche durch G geht und zwischen der Parallelen AD, BC enthalten ist, wird durch G in zwei zu $BC + 2AD$ und $AD + 2BC$ proportionale Stücke getheilt. Daraus folgt, wenn man auf BC $CP = AD$ macht, und auf AD $AQ = CB$, dass die Gerade PQ dann durch MN in zwei zu MP, QN proportionale Segmente getheilt wird; nun ist aber

$$MP = \frac{1}{2}BC + AD,\ QN = BC + \frac{1}{2}AD,$$

folglich

$$MP : QN = BC + 2AD : AD + 2BC;$$

also geht PQ durch G. Da die Geraden BP, QD gleich und parallel sind, so halbieren sich PQ und BD; PQ geht also durch E, den Halbierungspunkt von BD, das heisst, PQ fällt mit HE zusammen. Macht man ausserdem auf AD

$$DS = CB,\ AA' = \frac{1}{3}AS$$

und auf BC das Stück $CC' = AA'$, so muss, weil

$$A'N = AN - AA' = \frac{1}{2}AD - \frac{1}{3}(AD - BC) = \frac{1}{6}(AD + 2BC),$$

und

$$MC' = MC + CC' = \frac{1}{2}BC + \frac{1}{3}(AD - BC) = \frac{1}{6}(BC + 2AD),$$

also

$$A'N : MC' = AD + 2BC : BC + 2AD$$

ist, A'C' durch G gehen.

Hieraus entnimmt man zwei einfache Constructionen des Schwerpunktes eines Vierecks mit zwei parallelen Seiten (Trapezes) entweder als Durchschnittspunkt von MN und PQ, oder als Durchschnitt von MN mit A'C'*).

139. Die oben auseinandergesetzte Construction des Schwerpunktes eines Vierecks versagt den Dienst, sobald die Diagonalen AC, BD parallel laufen (Fig. 118). Aber in diesem Falle sind die Dreiecke ABD, BCD äquivalent und von entgegengesetztem Zeichen, und folglich $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$. Daraus folgt, dass der Flächeninhalt der Figur gleich Null ist (Nr. 95), und der Schwerpunkt fällt ins Unendliche in der gemeinsamen Richtung von AC und BD.



140. Man verlangt jetzt den Schwerpunkt einer beliebigen geradlinigen Figur. Die Fläche dieser Figur kann man als die algebraische Summe der Dreiecke ansehen, welche von einem beliebigen Pole O aus die Seiten des Linienzuges projicieren. Nachdem man die Schwerpunkte $A_1, A_2, A_3, \ldots$ dieser Dreiecke bestimmt hat, und die Flächen auf eine constante Basis reduciert sind, so dass sie den Segmenten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ proportional werden, findet man den gesuchten Punkt als Schwerpunkt der Punkte $\alpha_1 . A_1$, $\alpha_2 . A_2$, $\alpha_3 . A_3, \ldots$, den man auf die eine oder die andere der beiden dargelegten Arten construieren kann.

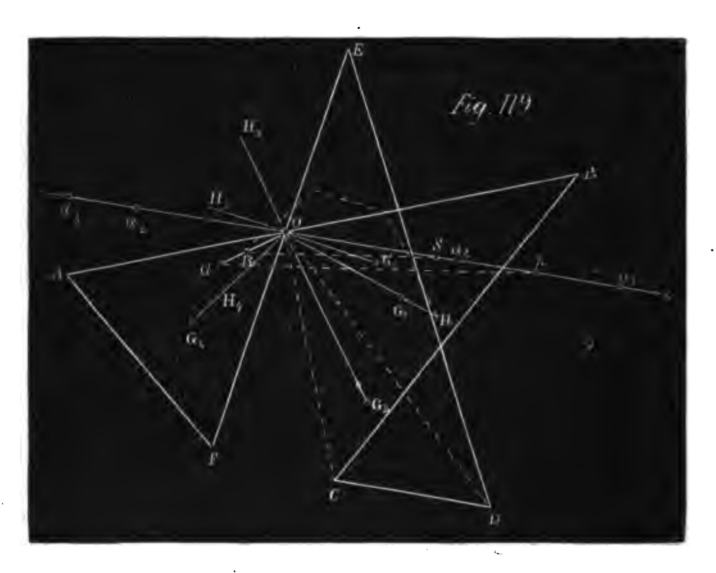
Ist der Pol O völlig beliebig, so ist die Zahl der Dreiecke gleich der Zahl der Seiten des Linienzuges; nimmt man aber O auf einer Seite oder im Durchschnitt zweier Seiten an, so vermindert sich die Zahl der Dreiecke bezüglich um eine oder zwei Einheiten.

Statt die gegebene Figur als Summe von Dreiecken zu betrachten, kann man sie auch als Aggregat von Vierecken und Dreiecken ansehen, in welche sie sich durch zweckmässig gezogene Gerade zerlegen lässt.

141. *Beispiele.* — Die gegebene Figur sei das verschlungene Sechseck ABCDEF (Fig. 119 a. f. S.), welches die Summe der Dreiecke OBC, OCD, ODE, OFA ist, unter O den Durchschnittspunkt der Seiten AB, EF verstanden. Von diesen vier Dreiecken ist das erste und das letzte positiv, die beiden andern negativ. Man bestimme ihre Schwerpunkte G_1, G_2, G_3, G_4, und die Flächen der Dreiecke, auf eine gemeinsame Basis reduciert, mögen proportional den Segmenten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ sein. Wie die Dreiecke sind das

*) Culmann, *a. a. O.*, S. 150. — Walker, *On an easy construction of the centre of gravity of the trapezium* (Quarterly Journal of Mathematics, vol. 9, London 1868), p. 339.

erste und letzte der Segmente α positiv, das zweite und dritte negativ. Wollen wir nun die Methode der Nr. 120 anwenden, so müssen wir noch die vier Producte $\alpha_r \,.\, OG_r$ auf eine gemeinsame



Basis h reducieren. In der Figur ist durch O eine willkürliche Gerade x gezogen, ihre positive Richtung fixiert, und auf ihr sind die Segmente h, α_1, α_2, α_3, α_4 vom gemeinsamen Anfang O aus abgetragen*) (h, α_1, α_4 in dem einen Sinne; α_2, α_3 im entgegengesetzten). Nachdem der Endpunkt von h mit G_r verbunden ist, hat man durch den Endpunkt von α_r zu der Verbindungslinie die Parallele gelegt, bis sie OG_r in H_r geschnitten. So hat man erhalten $OG_r : h = OH_r : \alpha_r$, und folglich $\alpha_r \,.\, OG_r = h \,.\, OH_r$. Dann ist von O ausgehend mit zu OH_1, OH_2, OH_3, OH_4 äquipollenten Seiten ein Linienzug construiert; die Schlussgerade ist OR. Um endlich den Punkt G zu construieren, der durch die Relation

$$OG = \frac{h \,.\, OR}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}$$

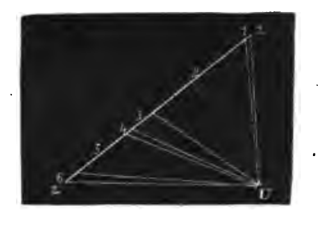
gegeben ist, hat man auf Ox vom Anfang O aus das Segment $OS = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ abgetragen, den Endpunkt mit R verbunden, und durch den Endpunkt von h zu der Verbindungsgeraden die Parallele gezogen, bis sie OR in G geschnitten.

---

*) In Fig. 119 sind die Endpunkte der Segmente h, α durch diese Buchstaben selbst bezeichnet. Einige der im Text erwähnten Geraden sind in der Figur nicht gezogen.

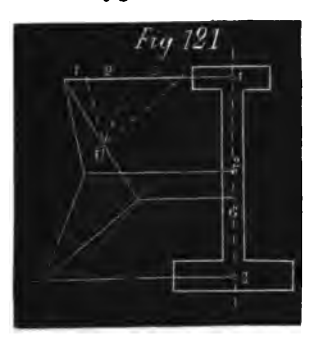
142. Die Figur sei ferner der Querschnitt eines sogenannten Winkeleisens (Fig. 120). Derselbe ist in sechs Theile getheilt, vier Trapeze, ein Dreieck und ein Rechteck, die mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 bezeichnet sind. Von diesen sechs Theilen sind die Schwerpunkte construiert, und die Flächen auf eine gemeinsame Basis reduciert, wodurch man die proportionalen Segmente 1, 2, 3, 4, 5, 6 bestimmt hat, welche dann der Reihe nach auf eine beliebige Grade zz aufgetragen sind. Durch einen beliebig gewählten Punkt U sind dann Strahlen nach den Punkten von zz gezogen, welche Anfang und Ende der Segmente bilden; durch die Schwerpunkte der sechs Componentenfiguren sind ferner zu zz Parellele gezogen und darauf ein Polygon construiert, dessen Scheitel auf diesen Parallelen liegen, und dessen Seiten der Reihe nach den Strahlen, die von U ausgehen, parallel sind. Die beiden äussersten Seiten dieses Polygons schneiden sich in einem Punkte; durch denselben ist ebenfalls eine Parallele zu zz gelegt, und diese Gerade muss den gesuchten Schwerpunkt enthalten. Um eine zweite Gerade, welche die nämliche Eigenschaft besitzt, zu erhalten, wiederholt man die oben angedeuteten Operationen in Bezug auf eine andere Richtung als zz; oder man construiert, wie in unserer Figur geschehen, unter Festhaltung von zz und U, ein neues Polygon, dessen Scheitel auf Geraden liegen, welche durch die Schwerpunkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 senkrecht zu zz gezogen sind, und dessen Seiten auf den entsprechenden Strahlen durch U senkrecht stehen. Es ist klar, dass diess so viel ist, als eine neue Gerade zz senkrecht zur ersten zu ziehen und in Bezug auf diese so weiter vorzugehen, wie es früher für die erste zz geschehen ist. Es versteht sich von selbst, dass auf zz die Segmente 1, 2, ... mit Rücksicht auf das Zeichen aufgetragen werden müssten, sobald die Flächenstücke, in welche die gegebene Figur zerlegt ist, nicht sämmtlich von demselben Zeichen wären.*)





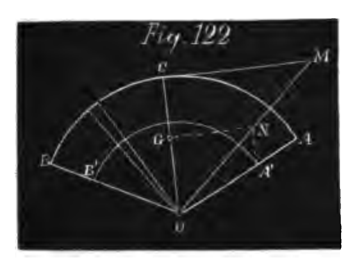
*) Culmann, *a. a. O.*, S. 198.

143. Bei der vorhergehenden Construction gebrauchten wir zwei Polygone zum Zwecke zwei Gerade zu erhalten, welche durch den Schwerpunkt gehen, den man sucht. Sobald man aber schon *a priori* eine Gerade kennt, auf welcher der Schwerpunkt liegen muss, so genügt ein einziges Polygon, z. B. wenn die Figur einen Durchmesser besitzt. Dieser Fall ist in dem nebenstehenden Beispiele verificiert (Fig. 121), wo die Figur eine Symmetralaxe besitzt.

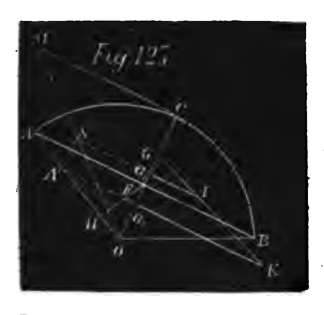


Diese Figur stellt den Querschnitt eines sogenannten doppelten T-Eisens dar.

144. Wir gehen zu den Schwerpunkten krummliniger Figuren über, und betrachten zunächst einen Kreissector OAB (Fig. 122). Wir denken uns denselben in eine unendlich grosse Zahl von concentrischen Elementarsectoren zerlegt, deren Schwerpunkte, wenn man sie als Dreiecke ansieht, auf dem mit dem Radius $OA' = \frac{2}{3} OA$ beschriebenen Kreise liegen. Der gesuchte Schwerpunkt ist also dann der Schwerpunkt G des Bogens A'B'. Um diesen Punkt zu finden (Nr. 135), wickelt man den halben Bogen CA auf der Tangente CM ab, verbindet O mit M und zieht A'N parallel zu OC, bis zum Durchschnitt N mit OM. Dann ist G der Fusspunkt des von N auf den mittlern Radius OC gefällten Perpendikels.*)



145. Es sei jetzt der Kreisabschnitt ACB (Fig. 123) gegeben. Derselbe ist die Differenz zwischen dem Sector OAB und dem Dreieck OAB, oder die Summe des Sectors OAB und des Dreiecks OBA. Folglich liegt der Schwerpunkt G des Abschnitts auf der Geraden (dem mittelsten Radius OC), welche die Schwerpunkte G_1, G_2 des Sectors und des Dreiecks verbindet, und theilt das Segment G_1, G_2 in zwei den Flächen dieser Figuren umgekehrt pro-



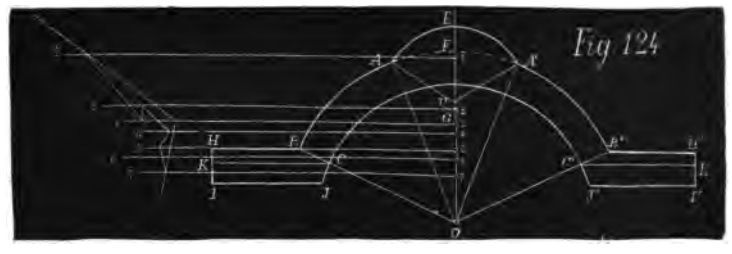
*) Culmann, *a. a. O.*, S. 153.

portionale Stücke. Nimmt man $OA' = \frac{2}{3} OA$ und sucht den Punkt N, wie eben gezeigt ist, so sind G_1, G_2 die Fusspunkte der von A', N auf den mittlern Radius OC gefällten Perpendikel. Es sei F der Durchschnittspunkt von AB, OC, und H der Fusspunkt der von F auf OA gefällten Senkrechten. Die Flächen des Sectors und des Dreiecks sind bezüglich gleich CM . OA, FH . OA, das heisst, sie sind den Längen CM, FH proportional; ziehen wir also durch G_1, G_2 zwei Segmente G_1I, G_2K parallel zu einander und von demselben Sinn, gleich oder proportional zu FH, CM, so ist der Durchschnittspunkt G von KI und OC der gesuchte Schwerpunkt. In der That hat man aus den ähnlichen Dreiecken GG_1I, GG_2K die Proportion

$$G_1G : G_2G = G_1I : G_2K = FH : CM.*)$$

146. Ist der Perimeter einer Figur, von der man den Schwerpunkt sucht, aus geradlinigen Segmenten und Kreisbogen zusammengesetzt, so zerlegt man, indem man die Sehnen der Bogen oder die Radien nach den Endpunkten zieht, die Figur in Theile, von denen man sämmtlich den Schwerpunkt und den Flächeninhalt zu finden weiss; man kann also dann das Verfahren der Nr. 142 in Anwendung bringen.

Beispiel. — Man verlangt den Schwerpunkt der schon oben in Nr. 103 behandelten Figur (Fig. 124). Zu dem Zwecke denken





wir sie zunachst in drei Theile zerlegt, den Mond, die Krone und die Summe der geradlinigen Theile; dann betrachten wir den Mond

*) Culmann, *a. a. O.*, S. 154.

als algebraische Summe der beiden Sectoren und eines Vierecks, die Krone als algebraische Summe zweier Sectoren, und indem wir noch den geradlinigen Theil mittelst der Geraden KCC'K' zerschneiden, erhalten wir die vorgelegte Figur gleich der Summe folgender Theilfiguren:

1. . . . . Sector UAEA',
2. . . . . Viereck OAUA',
3. . . . . Sector AOA'F,
4. . . . . Sector OB'B,
5. . . . . Sector OC'C,
6. . . . . Trapeze BCKH + H'K'C'B',
7. . . . . Trapeze CJIK + K'I'J'C,

von denen wir sämmtlich die Flächeninhalte zu bestimmen verstehen, indem wir sie auf eine gemeinsame Basis reducieren, und ebenso ihre Schwerpunkte zu construieren. Um den Schwerpunkt der Summe BCKH + H'K'C'B' zu finden, genügt es (Nr. 138), den Schwerpunkt des Trapezes BCKH zu bestimmen und durch denselben zu KC die Parallele zu ziehen bis zum Durchschnitt mit der Symmetralaxe EO; der Durchschnittspunkt ist dann der gesuchte Schwerpunkt. Um nun das Verfahren der Nr. 142 in Anwendung zu bringen, ziehe man in einer von EO verschiedenen Richtung, z. B. in der von KCC'K', eine Gerade zz und trage auf dieser der Reihe nach die Segmente 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, die den sieben Theilfiguren proportional sind, ab, dabei beachtend, dass die Segmente 3 und 5 in entgegengesetzter Richtung aufgetragen werden müssen, da sie negative Flächen repräsentieren. Durch einen beliebig ausserhalb zz angenommenen Punkt V ziehe man Strahlen nach den Anfangs- und Endpunkten genannter Segmente; dann ziehe man durch die Schwerpunkte der Theilfiguren Parallele zu zz und construiere ein Polygon, dessen Scheitel in diese Parallelen fallen, und dessen Seiten der Reihe nach den vom Pole V ausgehenden Strahlen parallel sind. Durch den Durchschnittspunkt der ersten und letzten Seite des Polygons ziehe man eine Parallele zu zz, dann schneidet diese die Axe OU im gesuchten Schwerpunkt der gegebenen Figur. Dieser Punkt G fällt in unserer Zeichnung sehr nahe mit dem Punkte 2 zusammen, dem Schwerpunkte des Vierecks OAUA'. Würde man die Seiten des Polygons hinreichend verlängern, um den Punkt zu finden, in welchem die erste Seite die vierte trifft, und den, in welchem die vierte und sechste Seite sich schneiden, und durch diese Punkte Parallele zu zz ziehen, bis sie die Symmetralaxe schneiden, so erhielte man in den Schnittpunkten die Schwerpunkte des Mondes und der Krone.

IX. RECTIFICATION EINES KREISBOGENS.

147. Um einen Kreisbogen AB auf der Tangente in A abzuwickeln (Fig. 125), kann man folgendermassen vorgehen. Man verlängere BA um ein Stück $AC = \frac{1}{2} BA$, dann beschreibe man mit C als Centrum und mit CB als Radius einen Bogen, der die Tangente in D trifft, dann ist AD die Länge des gegebenen Bogens mit einem negativen Fehler, dessen Verhältniss zum Bogen

$$-\frac{\theta^4}{1080} - \frac{\theta^6}{54432} \cdots$$

ist, unter θ das Verhältniss des Bogens zum Radius verstanden.*)



Oder (Fig. 126): Es sei D der Halbierungspunkt des Bogens AB, und E der Halbierungspunkt des Bogens AD; der Radius OE treffe die Tangente durch A in C, und man ziehe CB; dann ist AC + CB die Länge des gegebenen Bogens mit einem positiven Fehler, dessen Verhältniss zum Bogen gleich ist



$$+\frac{\theta^4}{4320} + \frac{\theta^6}{3484648} \cdots .$$

Da $4320 = 4 \times 1080$ ist, so erhält man, wenn man zu $\frac{4}{5}$ der durch die zweite Construction gefundenen Länge $\frac{1}{5}$ der durch die erste Construction bestimmten Länge addiert, als resultierende Summe eine angenäherte Länge des Bogens mit einem positiven Fehler, dessen Verhältniss zum Bogen gleich ist

$$+\frac{17\,\theta^6}{870912} \cdots \text{**)}$$

Für den Beweis dieser Regeln verweisen wir den Leser auf die Originalarbeiten des Professor RANKINE, die wir am Fusse der Seite citiert haben.

---

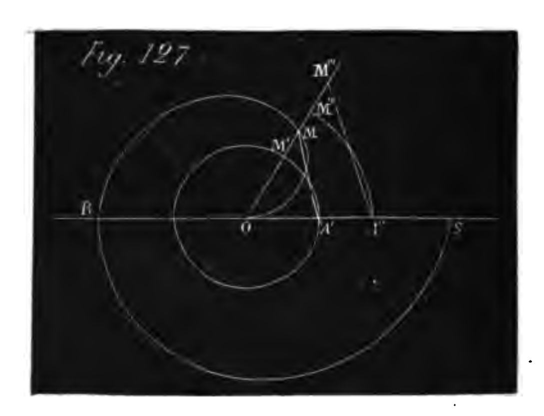
*) RANKINE, *On the approximate drawing of circular arcs of given length* (Philosophical Magazine, October 1867), p 256.

**) RANKINE, *On the approximate rectification of circular arcs* (Philosophical Magazine, November 1867), p. 381.

148. In Bezug auf diesen Gegenstand halte ich es für angemessen, hier einen Brief abdrucken zu lassen, den mein Freund, Herr Prof. A. SAYNO, an mich gerichtet hat.

„Die von CULMANN*) gegebene Methode, einen Kreisbogen AB auf der Tangente durch einen seiner Punkte abzuwickeln, ist gar zu lang. Ich glaube, man kann graphisch die Länge eines Kreisbogens in viel einfacherer Weise erhalten, indem man zu Hilfscurven seine Zuflucht nimmt, die, einmal construiert, in jedem Falle benutzt werden können.

„Man denke sich (Fig. 127) eine Windung OMRS der Spirale des ARCHIMEDES bezogen auf die Polaraxe OX und den Pol



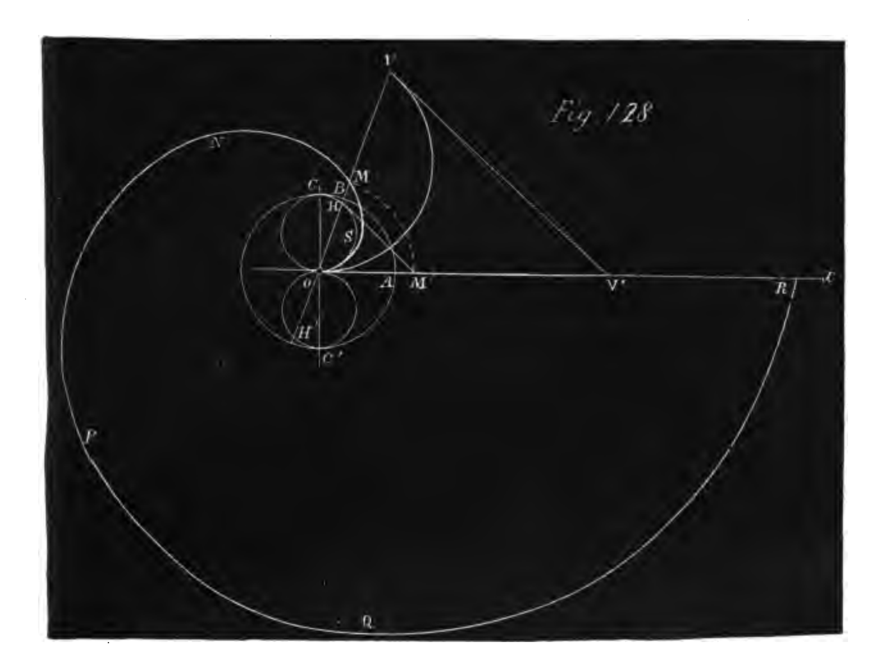
O, deren Gleichung $\varrho = a \cdot \omega$**) ist, und den Kreis, mit dem Mittelpunkt O und dem Radius OA′ = a. Es sei OM ein beliebiger Radiusvector der Spirale, der den Kreis in M′ schneidet, dann ist Bogen A′M′ = OM. Will man nun die Länge eines Kreisbogens A″M″ von beliebigen Radius OA″ bestimmen, so genügt es die Spirale (die man aus der vorigen Lage weggenommen denkt) so anzulegen, dass ihre Polaraxe mit dem Radius OA″ des gegebenen Bogens zusammenfällt, auf OA″ den Punkt A′ zu bezeichnen, und auf dem andern Radius OM″ den Punkt M, in dem derselbe die Curve schneidet. Nimmt man jetzt die Spirale weg und zieht durch A″ die Parallele zu A′M, so schneidet diese OM″ in M‴, und OM‴ ist die gesuchte Länge des Bogens. Man kann diese Spirale auf einer dünnen Platte von Messing, Talkstein oder Elfenbein construieren; es genügt auf ihr den Pol und den Punkt A′

*) CULMANN, *a. a. O.*, S. 37.

**) ϱ ist der Radiusvector OM, und ω die entsprechende Anomalie A′OM.

zu bezeichnen. Es wäre das ein neues Instrument, das man dem Graphometer in dem Reisszeuge der Ingenieure hinzufügen könnte.

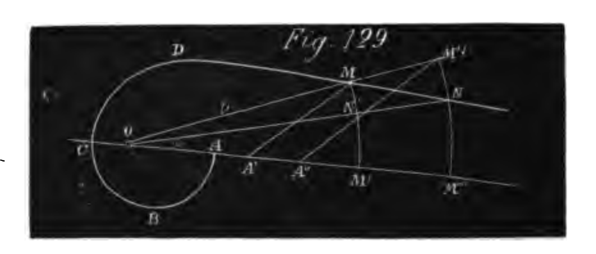
„Die Spirale des ARCHIMEDES $\varrho = a\omega$ (Fig. 128) liefert auch die Abwickelung eines Bogens auf der Tangente. Nachdem man



den Kreis, dessen Radius OA = a, und den Kreis, dessen Durchmesser OC = OA ist, beschrieben hat, und wenn B, H die Punkte sind, in denen diese Kreise von dem beliebigen Radiusvector OM geschnitten werden, so ist OM = Bogen AB = Bogen OA. Will man also den Bogen OV auf der Tangente OX abwickeln, so braucht man nur die Spirale in der Art zu legen, dass der Pol und die Polaraxe bezüglich mit dem Berührungspunkt O und der Tangente OX des gegebenen Bogens zusammenfallen, und dann die Punkte H, M zu bezeichnen, in denen die Sehne OV den Kreis vom Durchmesser OC und die Spirale trifft. Nimmt man jetzt die Spirale weg, macht auf OX das Stück OM′ = OM und zieht durch V zu HM′ die Parallele VV′, so ist OV′ die verlangte Länge des Bogens.

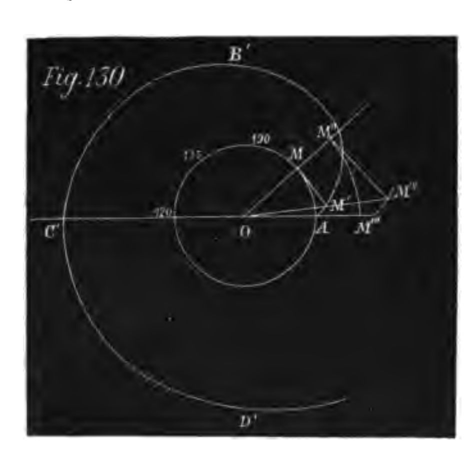
„Grösserer Festigkeit der Platte halber, die das Instrument bildet, ist es gut, den Kreis vom Radius OC′ = CO in Anwendung zu bringen; dann erhält man, wenn man VO verlängert denkt, OH′ = HO.

„Eine andere Curve, die zu dem nämlichen Zwecke dienen kann, ist die hyperbolische Spirale, deren Gleichung in Polarcoordinaten $a = \varrho\omega$ ist. Man zeichne (Fig. 129) eine Win-



dung dieser Curve ... NMDCBA, und bezeichne auf der Polaraxe den Punkt A′ so, dass OA′ = a ist. Dann hat der Kreisbogen MM′ mit dem Radius OM die Länge OA′; folglich hat ein beliebiger Bogen M″M‴ mit dem Centrum O zum Mass OA″, wo man A″ erhält, wenn man M″A″ parallel zu MA′ zieht. Diese Curve ist übrigens zur Bestimmung der Länge von kleinen Bogen unbrauchbar, so dass in praktischer Hinsicht die erste Curve vorzuziehen ist.

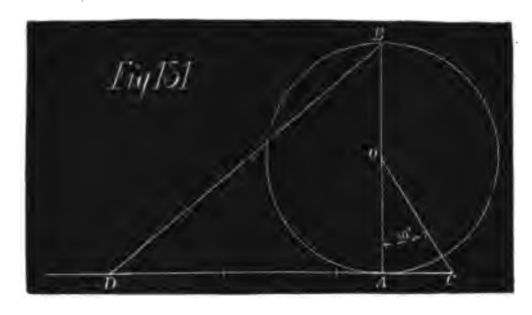
„Die hyperbolische Spirale giebt auch in sehr eleganter Weise die Theilung der Winkel. Will man nämlich den Bogen M′N′ $= \frac{1}{n}$M′M bestimmen (Fig. 129), so verlängere man den Radiusvector OM und mache OM″ = n . OM; dann schneide man die Spirale mit dem Radius OM″ in N, so trifft ON den Bogen M′M im gesuchten Punkte N′.



„Um den Bogen auf der Tangente abzuwickeln, kann man auch eine andere Hilfscurve benutzen, nämlich die Kreisevolvente. Man habe (Figur 130) den Kreis vom Radius OA′, und es sei A′M′B′C′D′ die Evolvente desselben. Aus der Figur hat man sofort: Bogen MA′ = MM′, wo MM′ die Tangente des Kreises in M ist. Will man nun den Bogen M″M‴ mit dem Centrum O auf der Tangente desselben durch den Punkt M″ abwickeln,

so braucht man nur OM′ zu ziehen, welche hinreichend verlängert die fragliche Tangente in M'^{V} trifft, dann ist $M''M'^{V}$ die verlangte Länge des Bogens.“

149. Höchst einfach ist die folgende Methode den halben Kreisumfang zu rectificieren, die mir Herr Ingenieur CERADINI, Professor an der Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri in Rom mitgetheilt hat. Es sei (Fig. 131) O der Mittelpunkt und AB ein



Durchmesser des Kreises vom Radius = 1, der Winkel COA = 30°. Nimmt man CD gleich dem dreifachen Radius, so ist

$$\overline{BD}^2 = \overline{BA}^2 + (CD - CA)^2 = 4 + (3 - tg\ 30^0),$$

d. h., es ist

$$BD = 3{,}14153,$$

ein bis auf vier Decimalen genauer Werth für den halben Umfang.

Mittelst dieser Methode lässt sich die Rectification eines Bogens, der grösser als 90° ist, auf die Rectification des Supplementarbogens reducieren.

DRUCKFEHLER.

Seite 2, *Zeile* 31 *statt* —CB—AB *lies* —CB—AC
„ 10, „ 1 *v. u. statt* p, q, r *lies* p, q, s.

VERLAGSBERICHT
VON
QUANDT & HÄNDEL IN LEIPZIG.

Beilstein. — Anleitung zur qualitativen chemischen Analyse. Von F. Beilstein, Professor am Kaiserlichen Technolog. Institut in St. Petersburg. 3. umgearb. Auflage. 8. Geh. 1 Mark 20 Pf.

Beilstein. — Die chemische Gross-Industrie auf der Weltausstellung zu Wien 1873. Von Prof. F. Beilstein, Mitglied der internat. Ausstellungs-Jury. gr. 8. Geh. 1 M. 50 Pf.

Bibliothek, montanistische. Verzeichniss der in Deutschland und im Auslande in den Jahren 1866—1870 auf den Gebieten des Berg-, Hütten- und Salinenwesens, der Mineralogie, Geognosie, Geologie und Paläontologie erschienenen Bücher, Zeitschriften und Karten. Mit Materien-Register. 8. Geh. 1 M. 50 Pf.

Birnbaum. — Leitfaden der chemischen Analyse. Für Anfänger bearbeitet von Karl Birnbaum, Professor der Chemie am Polytechnikum zu Karlsruhe. 2. verbesserte Aufl. 8. Geh. 1 M. 50 Pf.

Briot — Versuche über die mathematische Theorie des Lichtes. Von Ch. Briot, Professor am Lyceum Saint-Louis und Lehrer an der Höheren Normalschule zu Paris. Uebersetzt und mit einem Zusatze vermehrt von Prof. W. Klinkerfues, Director der Königl. Sternwarte zu Göttingen. gr. 8. Geh. 4 M. —

Butlerow. — Lehrbuch der organischen Chemie, zur Einführung in das specielle Studium derselben. Von A. Butlerow, o. Professor der Chemie an der Kaiserlichen Univresität zu St. Petersburg. Deutsche, vom Verfasser revidirte und mit Zusätzen vermehrte Ausgabe. gr. 8. Geh. 11 M.

Emsmann. — Sechszehn mathematisch-physikalische Probleme. Ein Ergänzungsheft zum Leitfaden der Physik an Realschulen und ähnlichen höheren Lehranstalten. Nebst einem Anhange, enthaltend 102 Aufgaben und deren Resultate. Von Gustav Emsmann, Oberlehrer an der Realschule 1. Ordnung zu Frankfurt a. O. Mit 1 Figurentafel. gr. 8. Geh. 2 M. 25 Pf.

Fahle und Lampe. — Physik des täglichen Lebens. Rationelle Naturlehre für Gebildete überhaupt und für vorgeschrittene Schüler an Gymnasien, Realschulen und Schullehrer-Seminarien. Von Professor H. Fahle, Oberlehrer am Gymnasium in Posen und Dr. H. Lampe, Lehrer am Gymnasium in Danzig. gr. 8. Geh. 7 M.

Falke. — Propädeutik der Geometrie. Eine Bearbeitung der geometrischen Formenlehre nach einer neuen Methode, gegründet auf praktische Aufgaben aus der Geodäsie. Von Jacob Falke, Lehrer der Mathematik und Physik am Gymnasium zu Arnstadt. Mit 80 in den Text gedruckten Holzschnitten. gr. 8. Geh. 3 M.

Fittig. — Das Wesen und die Ziele der chemischen Forschung und des chemischen Studiums. Akademische Antrittsrede von Rud. Fittig, ord. Professor der Chemie an der Universität Tübingen. 8. Geh. 50 Pf.

Gretschel. — Lehrbuch zur Einführung in die organische Geometrie. Von Heinr. Gretschel, Prof. an der Bergakademie zu Freiberg. Mit 95 Holzschnittfiguren. gr. 8. Geh. 7 M.

Hering. — Planimetrie nebst einer Einleitung in die Geometrie, zum Schul- und Selbstunterrichte bearbeitet von A. G. Hering, Oberlehrer an der Realschule in Chemnitz. Mit 5 Figurentafeln. gr. 8. Geh. 2 M. 40 Pf.

Druck von J. B. Hirschfeld in Leipzig.

